

Verschränkungsstrukturen in multidimensionalen diskreten Quantum Walk Modellen

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

JOCHEN ENDREJAT

geboren in Hof, Bayern

1. Gutachter: Prof. Dr. Helmut Büttner
2. Gutachter: Prof. Dr. Stephan Kümmel

Tag der Einreichung: 8.12.2006
Tag des Kolloquiums: 30.1.2007

Kurzfassung

Verschränkungsstrukturen in multidimensionalen diskreten Quantum Walk Modellen

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß verschränkter Coin Startzustände auf multidimensionale diskrete Quantum Walk Modelle untersucht. Durch die sich ergebenden Ortskorrelationen, ist es möglich die Struktur der Verschränkung zu analysieren und die Verschränkung selbst zu messen. Dazu werden für eindimensionale Multicoin Modelle und für multidimensionale Modelle die Ortskorrelationen als Funktion allgemeiner Coinzustände exakt abgeleitet und mit der Verschränkung von Zuständen aus unterschiedlichen Verschränkungsklassen verglichen. Für die eindimensionalen Mittelwerte wird ein direkter Zusammenhang mit einem Verschränkungsmaß abgeleitet. Die Struktur der berechneten Mittelwerte kann direkt mit den Elementen der Dichtematrix bzw. der reduzierten Dichtematrix in Zusammenhang gebracht werden. Durch kombinierte Betrachtung unterschiedlicher Erwartungswerte lassen sich auch komplizierte Verschränkungsstrukturen verstehen.

Abstract

Entanglement structures in multidimensional discrete Quantum Walk models

In this thesis, the influence of entangled coin states on multidimensional discrete Quantum Walk models is investigated. With the space correlation functions it is possible not only to analyze the structure of the entanglement, but also to measure the resulting entanglement. Two different type of models are analyzed, one-dimensional models with multiple coins and multidimensional models. The space correlation functions are calculated exactly as functions of general coin states and are compared with the entanglement of states from different entanglement classes. For the one-dimensional mean values, a direct connection to an entanglement measure has been found. The structure of the calculated mean values can be directly connected to the elements of the density matrices resp. the reduced density matrices. With the combination of different mean values it is possible to understand also complex entanglement structures.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung & Motivation	1
2	Verschränkungsmessung und Polynomiale Invarianten	5
2.1	Grundlagen	5
2.2	Charakterisierung reiner 2- und 3-Qubit Zustände	7
2.2.1	Concurrence	8
2.2.2	I-Concurrence und Tangle	8
2.2.3	Globalverschränkung und CKW Ungleichung	9
2.2.4	Bellsche Ungleichungen zur Verschränkungsmessung	9
2.2.5	SLOCC Klassen für 3-Qubit Zustände	10
2.2.6	3-Qubit Beispielszustände	12
2.3	Polynomiale Invarianten und 4-Qubit Verschränkung	14
2.3.1	SLOCC Klassifizierung von 4-Qubit Zuständen	15
2.3.2	Hyperdeterminanten und Polynomiale Invarianten	16
2.3.3	Charakterisierung von 4-Qubit Beispielszuständen	18
2.4	Diskussion	24
3	Diskrete Quantum Walk Modelle	25
3.1	Eindimensionale QW Modelle	25
3.2	Erweiterung des Coinraumes	31
3.3	Mehrdimensionale QW Modelle	34
3.3.1	2D	34
3.3.2	3D und 4D	39
3.4	Nichtlineare 1D Modelle	42
3.5	Diskussion	49
4	Verschränkung in 1D QW Modellen	51
4.1	Modellbeschreibung	51
4.2	Analytische Vereinfachung	52
4.3	Betrachtung der Beispielszustände	54
4.4	Subraumentwicklung	57
4.5	Diskussion	58
5	Verschränkung und mehrdimensionale QW Modelle	59
5.1	Berechnungen zur Hadamard Entwicklung	60
5.1.1	Fouriertransformation und Zeitentwicklung	60
5.1.2	Berechnung der Erwartungswerte	61
5.2	Zweidimensionaler QW	66
5.2.1	Berechnung der Erwartungswerte	66

5.2.2	Mittelwerte und I-Concurrence	68
5.2.3	Kovarianz und Korrelationen	70
5.2.4	Betrachtung eines Beispielszustandes	70
5.2.5	Diskussion	74
5.3	Dreidimensionaler QW	74
5.3.1	Berechnung der Erwartungswerte	74
5.3.2	Betrachtung der Beispielszustände	77
5.3.3	Vergleich: Concurrence - Kovarianz	86
5.3.4	Bemerkung zur Phasenabhängigkeit	87
5.3.5	Diskussion	88
5.4	Vierdimensionaler QW	88
5.4.1	Berechnung der Erwartungswerte	88
5.4.2	Betrachtung der Beispielszustände	90
5.4.3	Diskussion	100
6	Zusammenfassung	101
A	Charakterisierung der 3- und 4-Qubit Beispielszustände	105
B	Exakte Ortserwartungswerte der 3D & 4D QW Modelle	109
	Literaturverzeichnis	115

Kapitel 1

Einführung & Motivation

*Quantum Mechanics:
Real Black Magic Calculus
Albert Einstein*

Die Theorie der Quanteninformation (QI) beschäftigt sich mit der Anwendung der Quantenphysik auf Fragestellungen der Informationstheorie. Berechnungen sollen schneller, Kommunikation sicherer und Datenübertragung effizienter gemacht werden. Einen Gesamtüberblick bietet das Standardwerk von Nielsen und Chuang [92]. Grundlagen sind die, für den klassischen Betrachter, Besonderheiten der Quantenphysik: die Superposition der Zustände eines Teilchens und die Verschränkung der Zustände mehrerer Teilchen. Verschiedenste Protokolle aus dem Bereich der Quantenkommunikation sind theoretisch erforscht und experimentell umgesetzt worden. Die absolut sichere Verschlüsselung ist das Ziel der Quantenkryptographie. Mehrere Protokolle sind nunmehr bekannt. Die Superposition ist die Basis des BB84 Protokolls [14] von Bennett und Brassard. Das Protokoll nach Ekert [41] beruht auf verschränkten Zuständen. Mittlerweile werden Geräte, basierend auf quantenkryptographischen Grundlagen, kommerziell vertrieben. Die Verschränkung der Zustände mehrerer Teilchen stellt die Ressource weiterer QI Protokolle dar. Ein Highlight ist die sogenannte Quantenteleportation [15] mit der experimentellen Umsetzung durch Bouwmeester et al. [23]. Die experimentelle Übertragung der Information eines Zustandes wird heutzutage über mehrere Kilometer erfolgreich geschafft [83,111]. Weitere Protokolle beschäftigen sich beispielsweise mit Superdense Coding [17], der Übertragung von zwei klassischen Bits mit einem Quantenbit (Qubit). Ein Hauptanliegen der QI Forschung ist daher das Verständnis bzw. die Charakterisierung verschränkter Zustände.

Das große Ziel der Quanteninformationstheorie ist der Bau eines Quantencomputers. Ein solches System besteht wie im klassischen Fall aus Hardware und Software. Die Hardwareseite beschäftigt sich mit der Bereitstellung der Architektur, z.B. möglicher Quantengatter. Ein Stichwort ist hier die kohärente Kontrolle von Quantensystemen. Aktuell gelingt die Kontrolle von 12 Qubits [91]. Der Dekohärenz [122] steht die Quantenfehlerkorrektur [105] ebenbürtig gegenüber. Die Softwareseite bemüht sich um Entwicklung der Algorithmen zur Lösung bestimmter Aufgaben und Probleme, die im klassischen Fall nur mit erheblichem Aufwand zu berechnen wären. Bisherige Meilensteine auf der Softwareseite sind der Suchalgorithmus von Grover [53] und der Faktorisierungsalgorithmus von Shor [104]. Im Gegensatz zum exponentiellen Anstieg der Rechendauer mit der Größe der Zahl im klassischen Fall, gelingt die Faktorisierung mit polynomiellem Aufwand. Die erste experimentell erfolgreiche Umsetzung auf einem Quantencomputermodell gelang Vandersypen

et al. [113] mit der Zerlegung der Zahl 15 in die Primfaktoren 3 und 5. Diese Zerlegung mag lächerlich einfach erscheinen, demonstriert aber das funktionierende Zusammenspiel von Quantenphysik und Informationstheorie. Der Algorithmus von Shor basiert auf der effizienten Umsetzung der Fouriertransformation auf einer Quantencomputerarchitektur. Um nun weitere Algorithmen zu finden, bedient man sich beim klassischen Vorbild. Stochastische Algorithmen stellen ein Erfolgsmodell innerhalb der klassischen Informationsverarbeitung dar, siehe z.B. [88]. Die Erweiterung klassischer Zufallsweg-Modelle sind nun die Quantum Random Walks bzw. Quantum Walks (QW). Der Begriff des Quantum Random Walks wurde erstmals 1993 in einer Arbeit von Aharonov, Davidovich und Zagury [5] vorgestellt. Sie betrachteten die eindimensionale Bewegung eines Spin-1/2 Teilchens, wobei die Bewegungsrichtung durch eine Messung der z -Komponente des Spins gesteuert wird. Durch die Superposition der Wahrscheinlichkeitsamplituden ergibt sich im Mittel eine größere zurückgelegte Strecke als im klassischen Fall. Das Kernkonzept besteht nun aus einer unitären Zeitentwicklung nach obigem Vorbild, also ohne zwischenzeitlich durchgeführten Messungen. Natürlich mit der Absicht einer effizienten Umsetzung bzw. Simulation von Quantum Walks auf Quantencomputern.

QW Modelle: – Obwohl ein Quantum Walk ähnliches Modell bereits von Feynman in seinen berühmten *Lectures on Physics* diskutiert wurde, gelangten sie erst mit Erforschung möglicher Quantencomputer ins Visier der QI Gemeinschaft. Aktuelle Übersichtsartikel verfassten Kempe [63] und Kendon [64]. Zur Umsetzung von Quantum Walks werden in der Literatur zwei Modelle unterschieden. Der kontinuierliche und der diskrete Quantum Walk. Beide Umsetzungen basieren auf diskreten Raumstrukturen (Gitter bzw. Graphen) und unterscheiden sich in der Beschreibung der Zeitentwicklung: durch kontinuierliche Quantendynamik bzw. durch diskrete Zeitschritte. Der von Farhi und Gutmann [46] beschriebene kontinuierliche Walk benutzt eine Hoppingrate um die Bewegung des Teilchens auf dem Gitter zu steuern. Die Äquivalenz zwischen kontinuierlichen und diskreten Walks wird für den 1D Fall in einer Arbeit von Strauch [106] gezeigt.

Den Anstoß zur Diskussion von diskreten QW Modellen im Zusammenhang mit Quantenalgorithmen gaben Arbeiten von Ambainis et al. [8] und Aharonov et al. [4]. Diskrete Quantum Walks benutzen, äquivalent zum klassischen Random Walk, eine Münze (engl. Coin) zur Bewegungssteuerung. Im einfachsten Fall ist dies die Bewegung eines 2-Level Quantensystems (Qubit) auf einem eindimensionalen unendlichen Gitter. Nach dem Wurf der Münze, also Anwendung eines Operators auf das Qubit, wird bei Zustand $|0\rangle$ ein Schritt nach rechts, bei Zustand $|1\rangle$ ein Schritt nach links gegangen. Dieses Modell ist mittlerweile bezüglich Ausbreitung [8], Randbedingungen [9], Dekohärenz [67], Symmetrie [73] und dem Zusammenhang mit Quanten Zellular Automaten [48, 56, 72] ausführlich diskutiert worden. Da in dieser vorliegenden Arbeit der diskrete Coin Quantum Walk im Mittelpunkt steht, wird Kapitel 3 dieses Modell ausführlicher behandeln.

Algorithmen: – Die bisher gefundenen Algorithmen, die auf Quantum Walks basieren, kann man grob zwei Bereichen zuordnen. Wegsuche bzw. Struktursuche in Graphen einerseits und die Quantensuche in einer ungeordneten Datenbank, äquivalent zum Groverschen Vorbild, andererseits. Ein kurzer Reviewartikel wurde von Ambainis [6] geschrieben. Die Umsetzung der Algorithmen ist mit beiden QW Arten, kontinuierlich und diskret, gleichermaßen möglich.

Ein Algorithmus zur Quantensuche, basierend auf einem diskreten QW, beschreibt Shenvi et al. [103]. In diesem Artikel wird die Umsetzbarkeit eines Suchalgorithmuses auf einem Hypercube gezeigt. In der Effizienz bzw. Schnelligkeit ist er mit dem Groveralgorithmus

vergleichbar. Algorithmen aus der gleichen Gruppe sind die Elementunterscheidung nach Ambainis [7] und die räumliche Suche nach Childs und Goldstone [32,33]. Ein grundlegender Algorithmus zur Suche von Strukturen in Graphen wird ebenfalls von Childs et al. [31] beschrieben. Sie gebrauchen einen kontinuierlichen QW um auf einem bekannten Graphen die Strecke zwischen zwei Vertices zurückzulegen. Zur Findung eines Dreiecks in einem Graphen dient der Algorithmus von Magniez et al. [82]. Allen Algorithmen ist gemein, daß die Suche schneller als in vergleichbaren klassischen Fällen geht, vgl. die Übersicht von Kendon [64,65].

Experimentelle Realisierung: – Zur Umsetzung der QW Modelle in Experimenten gibt es vielfältige Vorschläge. Ob Ionen in Fallen [109], Atome in optischen Gittern [35,37,39], die Umsetzung mittels linearer optischer Elemente [61], Hohlraum Quanten-Elektrodynamik [3,36,101], mit kalten Atomen [80] oder mit Bose-Einstein Kondensaten [30]. Alle Systeme, in denen die oben erwähnte kohärente Kontrolle der Qubits möglich ist, kommen in Frage. Bis dato wurden nur zwei Experimente verwirklicht. Eine Methode im optischen Bereich, eine weitere aus dem Gebiet der Flüssigkeits NMR. Die experimentelle Implementierung eines Galton Brettes mit klassischen optischen Methoden erfolgte durch Bouwmeester et al. [22]. Der Zusammenhang mit Quantum Walks wurde durch Kendon und Sanders [66] gezeigt. In diesem Zusammenhang diskutierten Knight et al. [69] und Kendon [65,66] die Frage, was denn nun *Quantum* am QW sei, wenn er sich mit klassischen optischen Methoden implementieren ließe. Die Antwort, der QW zeigt Komplementarität, was im Experiment von Bouwmeester et al. demonstriert wird. Die Umsetzung eines periodischen $N = 4$ Quantum Walks mit NMR Methoden gelang der Gruppe um Ryan et al. [100].

Verschränkung in QW Modellen : – Um auf die Hauptressource der QI, die verschränkten Zustände, zurückzukommen, kann man die Frage nach Verschränkungsmöglichkeiten in QW Modellen stellen. Bei eindimensionalen Modellen mit einem Coin ergibt sich nur die Verschränkung zwischen Coin und Gitter. Erst bei einer Erweiterung der Modelle, z. B. die Erweiterung des Coinraumes, läßt sich der Einfluß der Verschränkung des Coins untersuchen. In solchen Fällen ist es auch möglich die Zeitentwicklung der Verschränkung im Coinunterraum zu betrachten. Die dabei auftretenden Probleme, beziehen sich auf die noch nicht vorhandenen Charakterisierungsmöglichkeiten verschränkter Zustände. Daß die Verschränkung des Coin Startzustands einen Einfluß hat, wird von Venegas et al. [115] beschrieben. Die Verschränkung zwischen Coin und Gitter untersuchen Abal et al. [2].

Motivation und Aufbau der Arbeit: – Wie man gesehen hat, ist die Motivation zum Studium von QW Modellen schnell gefunden. Einerseits ermöglichen sie die Grundlagen der Quanteninformationstheorie, z.B. verschränkte Zustände, näher zu erforschen. Andererseits Algorithmen für Quantencomputer zu konstruieren. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich nun auf den Teilaspekt der Verschränkung. Untersucht wird der Einfluß verschränkter Zustände auf die Ausbreitung von QW Modellen. Es wird sich zeigen, daß es möglich ist, mit den Ortsverteilungen der Walks eine Charakterisierung der Verschränkung vorzunehmen. Mittels Ortskorrelationen werden Analysen bzw. Messungen der Verschränkungsstruktur der Coin Startzustände realisierbar. Insbesondere sind hierfür multidimensionale QW Modelle geeignet, die der Multicoin Struktur gerecht werden, da pro Qubit eine Raumrichtung zur Verfügung steht.

Zur Struktur der Arbeit. In den beiden folgenden Kapiteln 2 und 3 werden nötige Grundlagen diskutiert. Zum einen die Verschränkungstheorie, zum anderen diskrete QW Mo-

delle. In Kapitel 4 wird ein eindimensionales QW Modell mit mehreren Coins besprochen. Der Einfluß verschiedener Coin Startzustände wird studiert. Hier wird gezeigt, daß für Zustände mit einer bestimmten Struktur der Ortsmittelwert des QW mit einem Verschränkungsmaß in direkten Zusammenhang gebracht werden kann. In Kapitel 5 wird diese Untersuchung auf mehrdimensionale QW Modelle erweitert. Darin ist es möglich Ortskorrelationen zu betrachten und so mehr Information über verschränkte Coin Startzustände zu erhalten. Das abschließende Kapitel 6 faßt die Hauptergebnisse zusammen.

Zur Notation: – Wie bereits bemerkt, wird in dieser Arbeit die englische Bezeichnung „*Quantum Walk*“ verwendet. Eine passende deutsche Übersetzung wäre Quantenzufallsweg. Da aber Zufall keine Rolle spielt, sondern der Walk durch eine unitäre Zeitentwicklung beschrieben wird, ist der Zufallsbegriff obsolet. Übrig bliebe nur der Quantenweg oder der Quantengang. Der Autor hat sich deshalb für den englischen Ausdruck entschieden. Da die Fachliteratur auf englisch abgefaßt wird, werden in anderen Fällen die äquivalenten Ausdrücke meist in Klammern mitgeliefert.

Kapitel 2

Verschränkungsmessung und Polynomiale Invarianten

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Verschränkungstheorie erläutert, die im weiteren Verlauf der Arbeit gebraucht werden. Die Frage nach einer Quantifizierung der Verschränkung ist zweigeteilt. Was wird gemessen und wie wird gemessen? Vor der eigentlichen Messung kommt zuerst die Charakterisierung des verschränkten Zustandes. Welchen Arten von Verschränkung gibt es? Erst nach einer Untersuchung der Verschränkungsstruktur kommt die Entwicklung entsprechender Verschränkungsmaße.

Der erste Abschnitt gibt eine kurze Übersicht der Ergebnisse auf dem Gebiet der Verschränkungstheorie. Danach folgt die beispielhafte Anwendung der Maße auf reine 3-Qubit Zustände, da obige Fragen für diese Art bereits geklärt sind. Die Quantifizierung von Zuständen mit vier Qubits ist diffiziler. Da diese Zustände noch Gegenstand aktueller Diskussion sind, werden im letzten Abschnitt polynomiale Invarianten zur Messung einer echten 4-Qubit Verschränkung betrachtet und mit vorhandenen Methoden verglichen.

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Aussagen über Verschränkungsmessung und Verschränkungscharakterisierung vorgestellt. Verschränkte Zustände wurden schon bei Einführung der Quantenmechanik diskutiert, stoßen sie doch an die Grenzen des klassischen Verständnisses. Die Diskussion um das EPR-Paradoxon zwischen Einstein, Podolsky und Rosen [40] auf der einen, und Bohr [20] auf der anderen Seite ging in die Wissenschaftsgeschichte ein. Der Begriff der Verschränkung geht zurück auf eine Arbeit von Schrödinger [102]. Einführende Übersichtsartikel verfaßten Horodecki [60], Bruß [26], Terhal [108] und Plenio [96].

Verschränkung hat nur im Kontext von mehreren Quantenteilchen eine Bedeutung. Der zugehörige Hilbertraum wird als Produktraum der Subsysteme geschrieben. Um verschränkte Zustände zu quantifizieren gibt es zwei Ansätze [16] und zwei Regime, die es zu unterscheiden gilt: die formale mathematische Definition und den operationellen Ansatz, das endliche und das asymptotische Regime. Im endlichen Regime behandelt man einzelne Zustände, im asymptotischen Bereich, Sequenzen von Zuständen.

Die formale Definition ist einfach. Reine Zustände heißen verschränkt, falls sie nicht als Produktzustände geschrieben werden können:

$$|\psi_{12\dots N}\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (2.1)$$

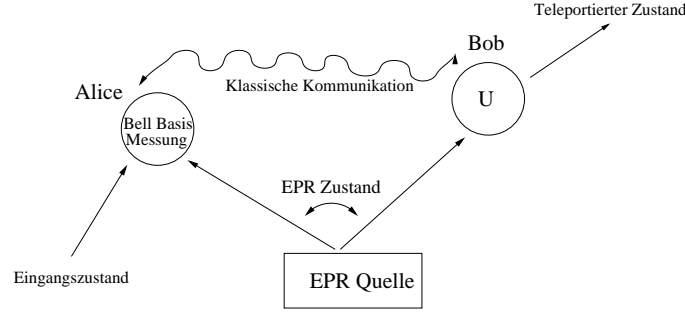


Abbildung 2.1: Quantumteleportation in a nutshell [21]: Alice will den ihr unbekannten Eingangszustand zu Bob übertragen. Eine Projektionsmessung scheitert aus, weil diese den Zustand zerstören würde. Alice und Bob besitzen weiterhin Teilchen eines EPR Paares als Hilfsbits. Alice führt nun eine Bell Basis Messung am kombinierten Paar Eingangszustand und ihren Teil des Hilfsbits durch. Das Ergebnis wird Bob über einen klassischen Kanal mitgeteilt. Dieser kann nun mit einer lokalen unitären Transformation U , die abhängig von Alices Messung ist, den Zustand rekonstruieren.

Andernfalls heißen sie separierbar. Die gleiche Definition gilt für gemischte Zustände. Ein gemischter Zustand heißt verschränkt, falls er nicht als Mischung reiner Produktzustände geschrieben werden kann:

$$\rho_{12\dots} \neq \sum_i p_i |a_i^1\rangle\langle a_i^1| \otimes |b_i^2\rangle\langle b_i^2| \otimes \dots, \quad (2.2)$$

wobei $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$. Das Standardbeispiel verschränkter reiner Zustände sind die Bell-Zustände:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (2.3)$$

Um die Verschränkung solcher bipartiten Zustände zu messen wurde von Bennett et al. [13] die Entropie der Verschränkung vorgeschlagen, die als von Neumann Entropie der reduzierten Dichtematrizen ρ_A bzw. ρ_B definiert ist:

$$E = -\text{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{tr}(\rho_B \log_2 \rho_B). \quad (2.4)$$

Die reduzierten Dichtematrizen des Gesamtsystems ρ_{AB} können über eine Teilsurbildung berechnet werden, z.B. $\rho_A = \text{tr}_B \rho_{AB}$.

Die operationelle Definition beruht auf der Verwendung der Zustände in bestimmten Quanteninformationsprotokollen. Den Teilsystemen werden einzelne Beobachter zugeordnet, die im bipartiten Fall meist mit Alice und Bob bezeichnet werden. Die Verschränkung eines Zustandes ist nun größer, falls damit eine bestimmte Operation besser durchführbar ist. Diese Operation wäre mit Produktzuständen natürlich nicht möglich. Ein Beispiel für ein operationelles Schema ist die Quantenteleportation, die in Abb. 2.1 kurz erläutert wird. Durch Verwendung eines EPR Paares, lokaler Transformationen und klassischer Kommunikation ist es möglich, einen unbekannten Zustand zu übertragen.

Allgemein werden solche Quantenoperationsschemata als LOCC Transformationen bezeichnet. LOCC (Local operations and classical communication) sind lokale Transformationen und klassische Kommunikation. Die lokal durchführbaren Operationen umfassen unitäre Transformationen, Addition von Hilfsbits, Messungen und Weglassen ganzer

Teilsysteme. Mit Hilfe dieser Transformationen kann man neben der Unterscheidung verschränkt / separierbar eine weitergehende Charakterisierung vornehmen, die darauf beruht, daß manche Zustände nicht durch LOCC Transformationen ineinander überzuführen sind. Innerhalb einer solchen Klasse kann man dann ein Verschränkungsmaß, wie die oben beschriebene Entropie der Verschränkung definieren. Für solche skalaren Verschränkungsmaße sollten besondere Randbedingungen gelten, die als Monotonie der Verschränkung [117] zusammengefaßt werden. Zu diesen Kriterien zählen folgende Eigenschaften:

- $E = 0$ für separierbare Zustände
- Invarianz unter lokalen unitären Transformationen
- Kein Anstieg unter LOCC
- Additivität: $E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$

Maße, die über LOCC Transformationen definiert sind, sind z.B. das Distillable Entanglement und das Entanglement of Formation. Ersteres Maß ist gleich der Anzahl der EPR-Paare die aus dem Zustand mittels LOCC hergestellt (destilliert) werden können. Zweiteres ist gleich der Anzahl der EPR-Paare, die gebraucht werden um den Zustand über LOCC zu formieren.

Im bipartiten Fall wurde gezeigt, daß es im asymptotischen Bereich nur eine Art der Verschränkung gibt, und diese mit obiger partieller Entropie gemessen werden kann. Das Distillable Entanglement und das Entanglement of Formation stimmen dann mit der partiellen Entropie überein.

Betrachtet man nun Zustände, die aus mehr als zwei Teilchen bestehen, so wird die Sache schwieriger. Selbst die Frage nach der Separierbarkeit eines Zustandes ist noch nicht vollständig gelöst. Da in der Arbeit nur reine 2-Level (Qubit) Zustände betrachtet werden, wird im folgenden näher auf die vorhandenen Maße und Charakterisierungsmöglichkeiten eingegangen.

2.2 Charakterisierung reiner 2- und 3-Qubit Zustände

In diesem Abschnitt werden die 2- und 3-Qubit Maße und entsprechende Beispielszustände vorgestellt, mit denen im weiteren Verlauf gearbeitet wird. Die Darstellung der Zustände erfolgt in der Standardbasis. Mit den Eigenzuständen $|0\rangle, |1\rangle$ des Pauli σ^z Operators als Basis eines einzelnen Qubits. Die Basiszustände der 2-, 3- und 4-Qubit Zustände sind dann Produktzustände der σ^z Basis und werden meist binär kodiert abgekürzt. So z.B. die Basis eines 2-Qubit Systems:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle := |1\rangle \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle := |2\rangle \quad (2.5)$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle := |3\rangle \quad |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle := |4\rangle \quad (2.6)$$

Die Basissysteme der 3- und 4-Qubit Zustände werden äquivalent dargestellt. (Man verzeihe die Kodierung bei der 1 beginnend.) Die Basiswahl bei der Behandlung der Verschränkung diskutiert Vedral [114].

2.2.1 Concurrence

Das in der Literatur allgemein akzeptierte Maß einer 2-Qubit Verschränkung ist die von Hill und Wootters [59, 119, 120] eingeführte Concurrence. Dieses Maß ist wie folgt definiert:

$$C_{12} = \max\{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0\}, \quad (2.7)$$

wobei die λ_i die Eigenwerte der Matrix

$$\varrho = \rho_{12}(\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \rho_{12}^* (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \quad (2.8)$$

mit absteigender Ordnung sind, σ^y eine der Paulimatrizen und ρ_{12} die Dichtematrix des Zustandes ist. Die Concurrence hängt mit dem oben erwähnten Entanglement of Formation folgendermaßen zusammen:

$$E_f = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{C_{12}}\right) \quad (2.9)$$

mit der binären Entropiefunktion $h(x) := -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$. Für einen allgemeinen 2-Qubit Zustand $|\psi\rangle$ in der binären Standardbasis:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \quad (2.10)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ läßt sich die Concurrence einfacher darstellen:

$$C_{12} = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \quad (2.11)$$

Daraus ergibt sich die Bedingung für die Separierbarkeit des Zustandes, $\alpha\delta = \beta\gamma$. Die Concurrence hat einen entscheidenden Vorteil z.B. gegenüber dem weiter unten beschriebenen 3-Qubit Maß Tangle. Da sie über die Dichtematrix definiert ist, kann man eine 2-Qubit Verschränkung auch in Systemen mit mehr als 2 Qubits berechnen. Also z.B. bei drei Qubit Zuständen die Concurrence zwischen Qubit 1 und Qubit 2, C_{12} , zwischen Qubit 1 und 3, C_{13} und zwischen Qubit 2 und 3, C_{23} . Die Berechnung erfolgt über die oben erwähnte Teilspurbildung.

2.2.2 I-Concurrence und Tangle

Um die Concurrence auf mehr als 2 Qubits zu erweitern, führten Rungta et al. [99] die I-Concurrence ein:

$$IC_{A-B} = \sqrt{2[1 - \text{tr}(\rho_A^2)]}, \quad (2.12)$$

wobei ρ_A die auf das Untersystem A reduzierte Dichtematrix ist, $\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB})$. Die Systeme A, B können nun aus mehr als einem Qubit bestehen. Bei 3-Qubit Zuständen kann man so z.B. die Verschränkung zwischen Qubit 1 und Qubit 2 und 3 mit der I-Concurrence IC_{1-23} messen. Folgende Schreibweise: $IC_{1-23} \equiv IC_1$, usw.

In einer Arbeit von Coffmann, Kundu und Wootters [34] wird untersucht, wie sich die Verschränkung in einem 3-Qubit Zustand auf die einzelnen Qubits aufteilt.

$$C_{12}^2 + C_{13}^2 \leq C_{1(23)}^2, \quad (2.13)$$

wobei $C_{1(23)}^2 = 4 \text{Det}(\rho_1)$ ist und gleich der oben eingeführten I-Concurrences ist, $C_{1(23)}^2 = IC_{1-23}^2$. Die Lücke zwischen beiden Seiten wird als 3-Qubit Verschränkung interpretiert und mit Tangle τ_{123} bezeichnet:

$$C_{1(23)}^2 = C_{12}^2 + C_{13}^2 + \tau_{123} \quad (2.14)$$

2.2.3 Globalverschränkung und CKW Ungleichung

In [43] und [44] wurde gezeigt, daß man das 3-Qubit Tangle und die 2-Qubit Concurrences mit einem globalen Verschränkungsmaß in Beziehung setzen kann. Das sogenannte Global Entanglement Q führten Meyer und Wallach [86] ein, um die in einem Zustand enthaltene Gesamtverschränkung zu messen. Brennen [24] zeigte einen Zusammenhang mit den auf 1-Qubit reduzierten Dichtematrizen und so den Zusammenhang mit der I-Concurrence. Das Global Entanglement Q kann als gemittelte quadratische 1-Qubit I-Concurrence geschrieben werden:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N IC_i^2. \quad (2.15)$$

Dadurch war es möglich folgende Beziehung abzuleiten:

$$Q = \frac{2}{3}(C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2) + \tau_{123}. \quad (2.16)$$

Die Gesamtverschränkung in einem 3-Qubit Zustand, gemessen mit der Globalverschränkung Q , kann als Summe der zweier Verschränkungen, gemessen durch die Concurrences, und der dreier Verschränkung, gemessen durch das Tangle, ausgedrückt werden.

Coffman, Kundu und Wootters (CKW) vermuteten, daß obige Ungleichung auch für Systeme mit n -Qubits gilt, also:

$$C_{12}^2 + C_{13}^2 + \dots + C_{1n}^2 \leq C_{1(23\dots n)}^2. \quad (2.17)$$

Diese CKW Ungleichung wurde erst kürzlich durch Osborne und Verstraete [94] bewiesen.

2.2.4 Bellsche Ungleichungen zur Verschränkungsmessung

Neben diesen Maßen gibt es natürlich weitere Möglichkeiten Verschränkung zu quantifizieren. Beispielsweise durch Bellsche Ungleichungen, wie in [43, 44] erörtert wird. In diesen Arbeiten wird ein Klassifizierungsschema nach Yu et al. [121] numerisch umgesetzt und mit obigen vorgestellten Maßen verglichen. Als Ergebnis stellte sich heraus, daß die Ungleichungen nicht nur dazu geeignet sind, Verschränkung zu klassifizieren, sondern auch zu quantifizieren.

Die Bellschen Ungleichungen basieren auf Mermin-Klyshko Polynomen [11, 68, 84]. Für 3 Qubits können die Polynome als Produkte von Spin Operatoren geschrieben werden:

$$F_3 = (AB' + A'B)C + (AB - A'B')C' \quad (2.18)$$

$$F'_3 = (AB' + A'B)C' - (AB - A'B')C, \quad (2.19)$$

wobei die Operatoren Summen von Paulimatrizen sind

$$A^{(\prime)} = \vec{a}^{(\prime)} \cdot \vec{\sigma}_A, \quad B^{(\prime)} = \vec{b}^{(\prime)} \cdot \vec{\sigma}_B, \quad C^{(\prime)} = \vec{c}^{(\prime)} \cdot \vec{\sigma}_C \quad (2.20)$$

mit $\vec{a}^{(\prime)}$, $\vec{b}^{(\prime)}$ und $\vec{c}^{(\prime)}$ normierten Vektoren und den Paulimatrizen $\vec{\sigma}_A$, $\vec{\sigma}_B$, $\vec{\sigma}_C$ bezogen auf die Qubits A , B und C mit $\vec{\sigma}_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$.

Die Anwendung der Klassifizierung nach Yu et al. [121] funktioniert folgendermaßen. Man maximiert den Absolutbetrag des Erwartungswertes des Operators von F_3 und erhält bei reinen Produktzuständen:

$$\max\{|\langle F_3 \rangle_\rho| \leq 2. \quad (2.21)$$

Mit dem Ergebnis kann bei verschränkten 3-Qubit Zuständen noch zwischen 2-Qubit verschränkt

$$\langle F_3 \rangle_\rho^2 + \langle F'_3 \rangle_\rho^2 \leq 2^3 \quad (2.22)$$

und 3-Qubit verschränkt

$$\langle F_3 \rangle_\rho^2 + \langle F'_3 \rangle_\rho^2 \leq 2^4 \quad (2.23)$$

unterschieden werden. Der numerische Aufwand ist z.B. bei 3-Qubit Zuständen eine Optimierung von 18 Parametern unter nichtlinearen Nebenbedingungen.

Für einen 4-Qubit Zustand lassen sich die Mermin-Klyshko Polynome einfach erweitern:

$$F_4 = \frac{1}{2}(D + D') \otimes F_3 + \frac{1}{2}(D - D') \otimes F'_3 \quad (2.24)$$

$$F'_4 = \frac{1}{2}(D + D') \otimes F'_3 + \frac{1}{2}(D' - D) \otimes F_3, \quad (2.25)$$

wobei $D^{(\prime)}$ äquivalent zu (2.20) definiert ist. Die Klassifizierung geht dann wie folgt. Für einen Produktzustand gilt:

$$\max\{|\langle F_4 \rangle_\rho| \leq 2 \quad (2.26)$$

Für vorhandene 2-Qubit Verschränkung gilt:

$$\langle F_4 \rangle_\rho^2 + \langle F'_4 \rangle_\rho^2 \leq 2^3 \quad (2.27)$$

und eine vorhandene 3-Qubit Verschränkung gilt:

$$\langle F_4 \rangle_\rho^2 + \langle F'_4 \rangle_\rho^2 \leq 2^4. \quad (2.28)$$

Für $\langle F_4 \rangle_\rho^2 + \langle F'_4 \rangle_\rho^2 > 2^4$ hat man eine notwendige Bedingung für eine 4-Qubit Verschränkung. In [43, 44] wurde bei der Untersuchung parameterabhängiger Zustände festgestellt, daß das erhaltene Maximum der optimierten Ungleichungen im Verlauf mit Verschränkungsmaßen, wie der Concurrence, dem Tangle oder dem Gap der CKW Ungleichung übereinstimmt.

2.2.5 SLOCC Klassen für 3-Qubit Zustände

Wie oben beschrieben, basiert eine Möglichkeit der Charakterisierung verschränkter Zustände auf LOCC Transformationen. Bei Betrachtung von 2-Qubit Zuständen, können alle verschränkten Zustände mit dem EPR Paar $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ identifiziert werden. D.h. die Verschränkung jedes reinen bipartiten Zustandes ist asymptotisch äquivalent unter LOCC zum EPR Zustand. Bei Anwendung asymptotischer LOCC erhält man bei Zuständen mit mehr als drei Qubits mehrere nicht äquivalente Formen der Verschränkung. In [38] wird von Dür, Vidal und Cirac die Klassifizierung von 3-Qubit Zuständen betrachtet. Da sie einzelne Zustände genauer untersuchen, können die Ergebnisse des asymptotischen Bereiches nicht verwendet werden. Zwei einzelne Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ können mit Sicherheit (Wahrscheinlichkeit = 1) mit LOCC ineinander konvertiert werden, falls sie über lokale unitäre Transformationen zusammenhängen. Aber selbst im einfachen bipartiten Fall sind die Zustände meist nicht über lokale unitäre Transformationen zusammenhängend.

Dür et al. untersuchen nun die Klassifizierung von Zuständen unter SLOCC Transformationen. SLOCC (stochastic local operations and classical communication) ist LOCC ohne garantierte Erfolgswahrscheinlichkeit. Sie definieren zwei Zustände als äquivalent verschränkt, falls diese durch SLOCC Transformationen ineinander übergeführt werden können. Ein Teilergebnis ist folgendes: Zwei Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ sind äquivalent unter

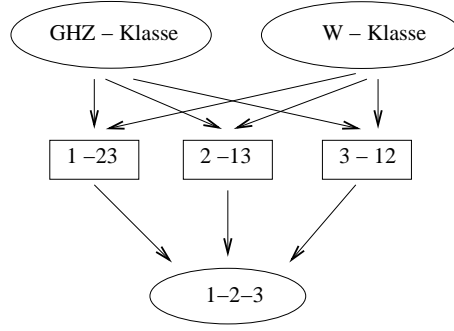


Abbildung 2.2: SLOCC Klassenstruktur reiner 3-Qubit Zustände aus der Arbeit von Dür et al. [38].

SLOCC, falls, und nur dann, die Zustände durch invertierbare lokale Transformationen zusammenhängen. Bei drei Qubits z.B.

$$|\phi\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 |\psi\rangle \quad \text{und} \quad |\psi\rangle = U_1^{-1} \otimes U_2^{-1} \otimes U_3^{-1} |\phi\rangle, \quad (2.29)$$

wobei U_1, U_2 und U_3 invertierbare Operatoren sind. Das Hauptergebnis der Arbeit von Dür et al. ist die Klassenstruktur reiner 3-Qubit Zustände, die in Abb. 2.2 dargestellt ist. Sie zeigen, daß sich jeder 3-Qubit verschränkte Zustand durch SLOCC in eine von zwei Standardformen konvertieren läßt. Einerseits in den GHZ-Zustand (Greenberger, Horne und Zeilinger [51, 52]):

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad (2.30)$$

andererseits in den W-Zustand:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad |\widetilde{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle). \quad (2.31)$$

Die zugehörigen Klassen werden den Prototypen zugeordnet. Bei 3-Qubit Zuständen können dann weiterhin 2-Qubit verschränkte Zustände (Qubit 1 und 2 verschränkt, mit 3 – 12 bezeichnet, usw.) und Produktzustände unterschieden werden. Diese Klassenstruktur läßt sich auch anhand der oben besprochenen Maße differenzieren. Nur Zustände der GHZ-Klasse haben ein von Null verschiedenes Tangle Maß. Zustände aus der W-Klasse sind demnach nicht 3-Qubit verschränkt. Wie in [44] gezeigt, erfüllt der W-Zustand aber das Bell Kriterium für eine 3-Qubit Verschränkung. Diese kann als effektive 3-Qubit Verschränkung gedeutet werden, da die jeweiligen 2-Qubit Concurrences maximal sind, wie in [38] bewiesen wurde.

Eine weitere Möglichkeit SLOCC Invarianz zu berechnen, bieten Li et al. [77]. Ihr Ausgangspunkt sind Prototypenzustände, wie der GHZ- oder der W-Zustand. Das Existenzkriterium für eine mögliche SLOCC-Transformation ist wie von Dür et al. gezeigt, die Existenz lokaler unitärer Transformationen. Zwei Zustände $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ sind invariant unter SLOCC, falls die Transformation (2.29) möglich ist. Nimmt man nun den zu untersuchenden Zustand $|\phi\rangle$ und den Prototypen als $|\psi\rangle$, können leicht Kriterien berechnet werden, d.h. also Bedingungen unter denen die Transformation existiert. Diese sind meist auf die Invertierbarkeit der Matrizen zurückzuführen, also einer von Null verschiedenen Determinanten. Für einen allgemeinen 3-Qubit Zustand in der Standardbasis, $\sum_{i=1}^8 \alpha_i |i\rangle$, gelten

folgende Kriterien für eine SLOCC Äquivalenz zum GHZ-Zustand:

$$(\alpha_1\alpha_8 - \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_6)^2 - 4(\alpha_2\alpha_5 - \alpha_1\alpha_6)(\alpha_4\alpha_7 - \alpha_3\alpha_8) \neq 0 \quad (2.32)$$

$$(\alpha_1\alpha_8 - \alpha_3\alpha_6 - \alpha_2\alpha_7 + \alpha_4\alpha_5)^2 - 4(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)(\alpha_5\alpha_8 - \alpha_6\alpha_7) \neq 0. \quad (2.33)$$

Für den W-Zustand gelten neben der Gleichheit von (2.32) und (2.33) nachstehende weitere Bedingungen:

$$\alpha_1\alpha_4 \neq \alpha_2\alpha_3 \vee \alpha_6\alpha_7 \neq \alpha_5\alpha_8 \quad (2.34)$$

$$\alpha_2\alpha_5 \neq \alpha_1\alpha_6 \vee \alpha_4\alpha_7 \neq \alpha_3\alpha_8 \quad (2.35)$$

$$\alpha_4\alpha_6 \neq \alpha_2\alpha_8 \vee \alpha_3\alpha_5 \neq \alpha_1\alpha_7. \quad (2.36)$$

2.2.6 3-Qubit Beispielszustände

In [43] und [44] wurden die Eigenzustände einer 3-Qubit und einer 4-Qubit Heisenbergkette bezüglich der Verschränkung untersucht. Da somit die Verschränkungsstruktur genauestens bekannt ist, sollen diese Zustände hier als Beispielszustände dienen. Der Vorteil liegt in ihrer Parameterabhängigkeit. Bis dato wurden nur Prototypen, wie der GHZ-Zustand, untersucht. Bei Betrachtung der Parameterabhängigkeit der Verschränkung, fallen Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede verschiedener Charakterisierungsmöglichkeiten leichter ins Auge. Nachstehend sollen nun kurz die 3-Qubit Beispiele betrachtet werden. Die 4-Qubit Zustände werden im nächsten Unterkapitel eingehender untersucht. Eine kompakte Aufstellung der Ergebnisse befindet sich in Anhang A. Zur Charakterisierung eines reinen 3-Qubit Zustandes genügt es die Concurrences und das Tangle Maß zu berechnen, da damit die Verschränkungsstruktur des Zustandes schon vollständig erfaßt ist. Die Berechnung der Bell Maximierung dient im 3-Qubit Fall nur als Anschauung. Die Auswertung der Maße Globalverschränkung Q bzw. I-Concurrence ist zur Charakterisierung nicht notwendig, weil oben gezeigte Zusammenhänge gelten. Da nach der SLOCC Klassifizierung für 3-Qubit Zustände nur zwei relevante Klassen existieren, genügt es Zustände äquivalent zum GHZ- bzw. zum W-Zustand zu betrachten. Der parameterabhängige GHZ-Zustand, der hier mit $|\gamma\text{GHZ}\rangle$ bezeichnet wird:

$$|\gamma\text{GHZ}\rangle = \gamma|000\rangle + \sqrt{1-\gamma^2}|111\rangle \quad (2.37)$$

ist für $\gamma \in]0,1[$ 3-Qubit verschränkt. Dies zeigt man daran, daß die Concurrences alle gleich Null sind:

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0 \quad (2.38)$$

und am Tangle Maß, welches für den gewählten Parameterbereich von Null verschieden ist:

$$\tau_{123} = 4\gamma^2(1-\gamma^2). \quad (2.39)$$

Nach obigem Zusammenhang (2.16) ist für diesen Fall die Globalverschränkung gleich dem Tangle, $Q = \tau_{123}$.

Die nächsten Zustände sind Eigenzustände einer 3-Spin 1/2 Heisenbergkette (vgl. Anhang A), mit einer Anisotropie Δ :

$$|\psi_5\rangle = \kappa_1|110\rangle + \kappa_2|101\rangle + \kappa_1|011\rangle \quad |\psi_6\rangle = \kappa_1|001\rangle + \kappa_2|010\rangle + \kappa_1|100\rangle \quad (2.40)$$

mit der Normierung $2\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$ und den verwendeten Abkürzungen

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{\chi}}{2\sqrt{\eta}} \quad \kappa_2 = -\frac{2}{\sqrt{\chi}\sqrt{\eta}} \quad (2.41)$$

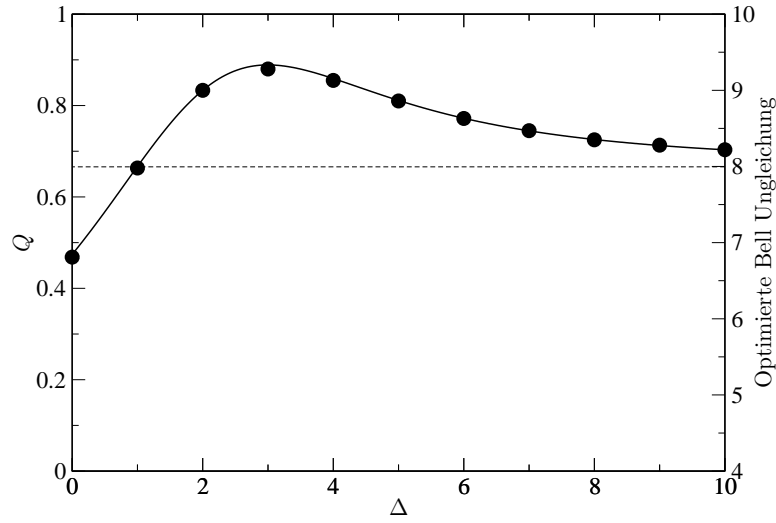


Abbildung 2.3: Vergleich zwischen Globalverschränkung Q (linke y-Achse, durchgezogene Linie) und optimierter Bell Ungleichung (rechte y-Achse, schwarze Punkte) für die Zustände $|\psi_5\rangle, |\psi_6\rangle$ als Funktion des Parameters Δ . Die gestrichelte Linie gibt die untere Grenze der Bell Bedingung für eine 3-Qubit Verschränkung an (≥ 8).

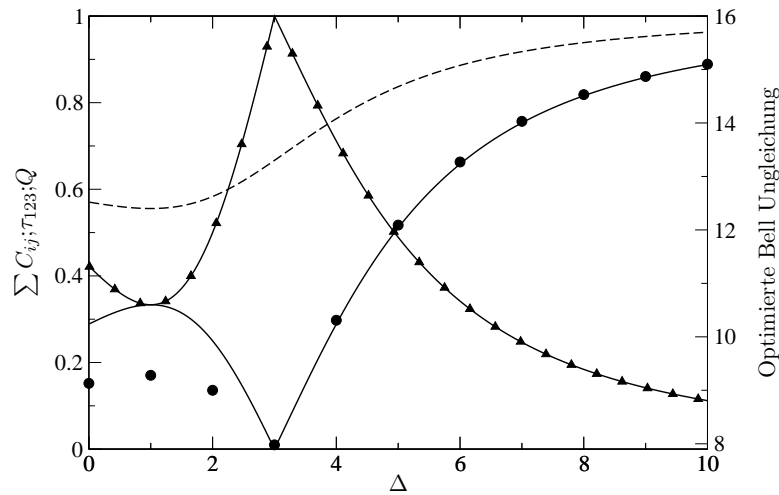


Abbildung 2.4: Vergleich der verschiedenen Verschränkungsmaße für den Zustand $|\psi_{78}\rangle$ als Funktion von Δ . Linke y-Achse: Globalverschränkung Q (gestrichelte Linie), Summe der quadrierten Concurrences (Linie mit Dreiecken) und Tangle (durchgezogene Linie). Rechte y-Achse: Optimierte Bell Ungleichungen (schwarze Punkte).

mit $\eta = \sqrt{12 + \Delta(\Delta - 4)}$ und $\chi = \eta + \Delta - 2$. Die Verschränkungsmaße werden als Funktion des Parameters Δ betrachtet. Diese Zustände haben ein Tangle gleich Null. Nach Gleichung (2.16) ist die Globalverschränkung somit äquivalent zur Summe der quadrierten Concurrences. In Abb. 2.3 sind die Globalverschränkung Q und das Ergebnis der Belloptimierung als Funktion des Parameters Δ aufgetragen. Beide Maße stimmen sehr gut überein. Im Bereich $\Delta \geq 0$ zeigen die Zustände die angesprochene effektive 3-Qubit Verschränkung, welche aus den Concurrences resultiert.

Der Zustand $|\psi_{78}\rangle$ ist aus zwei W-ähnlichen Eigenzuständen der angesprochenen Heisenbergkette zusammengesetzt, $|\psi_{78}\rangle := (|\psi_7\rangle + |\psi_8\rangle)/\sqrt{2}$:

$$|\psi_{78}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\zeta_1 |001\rangle + \zeta_2 |010\rangle + \zeta_1 |011\rangle + \zeta_1 |100\rangle + \zeta_2 |101\rangle + \zeta_1 |110\rangle \right) \quad (2.42)$$

mit

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}\sqrt{\chi}} \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{2}\sqrt{\eta}} \quad (2.43)$$

und χ und η wie oben definiert. Dieser Zustand zeigt ein endliches Tangle. Die Gesamtverschränkung Q ist nach Gleichung (2.16) somit aus 2-Qubit Verschränkungen und 3-Qubit Verschränkungen zusammengesetzt. In Abb. 2.4 sind die verschiedenen Maße als Funktion von Δ verglichen. Interessant ist die Nullstelle des Tangle bei $\Delta = 3$, wo die Summe der Concurrences maximal wird. Ebenso der Grenzfall $\Delta \rightarrow \infty$. Der Zustand nimmt hier GHZ Form an, das Tangle wird maximal und die Summe der Concurrences wird Null. Die optimierte Bell Ungleichung stimmt sehr gut mit dem Parameterverlauf des Tangle überein.

2.3 Polynomiale Invarianten und 4-Qubit Verschränkung

Für Zustände mit vier Qubits ist die allgemeine Quantifizierung der Verschränkung ein noch nicht abgeschlossenes Thema. Es gibt noch keine Möglichkeit eine 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung in einem 4-Qubit Zustand zu messen. Lediglich die Quantifizierung der 2-Qubit Verschränkung durch die Concurrences und der Globalverschränkung durch das Maß Q ist vorhanden.

Natürlich gibt es Spezialfälle in denen diese Maße ausreichend sind. Für 4 Qubits in einer verallgemeinerten W-Form:

$$c_1 |0001\rangle + c_2 |0010\rangle + c_3 |0100\rangle + c_4 |1000\rangle \quad (2.44)$$

kann gezeigt werden, daß die Summe der quadrierten Concurrences gleich dem Global Entanglement Q ist:

$$Q = \frac{1}{2} (C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{14}^2 + C_{23}^2 + C_{24}^2 + C_{34}^2). \quad (2.45)$$

Für diesen Zustand gilt ebenfalls ein Zusammenhang zwischen Gesamtverschränkung Q auf der einen Seite, und den Teilverschränkungen, gemessen durch die Concurrences, auf der anderen Seite. Um nun eine mögliche 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung abzuschätzen, kann man wie im 3-Qubit Fall mit der CKW Ungleichung arbeiten. Hierzu werden alle

möglichen 4-Qubit Permutationen der CKW Ungleichung verwendet:

$$C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{14}^2 \leq C_{1(234)}^2 \quad (2.46)$$

$$C_{12}^2 + C_{23}^2 + C_{24}^2 \leq C_{2(134)}^2 \quad (2.47)$$

$$C_{13}^2 + C_{23}^2 + C_{34}^2 \leq C_{3(124)}^2 \quad (2.48)$$

$$C_{14}^2 + C_{24}^2 + C_{34}^2 \leq C_{4(123)}^2. \quad (2.49)$$

Summiert man diese Ungleichungen auf, so erhält man:

$$2(C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{14}^2 + C_{23}^2 + C_{24}^2 + C_{34}^2) \leq C_{1(234)}^2 + C_{2(134)}^2 + C_{3(124)}^2 + C_{4(123)}^2 \quad (2.50)$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung entspricht der Summe der 1-Qubit I-Concurrences und somit dem Global Entanglement Q , vgl. (2.15). Daraus folgt:

$$Q \geq \frac{1}{2} \sum C_{ij}^2. \quad (2.51)$$

Weiterführend ist daher mit der Größe :

$$Q - \frac{1}{2} \sum C_{ij}^2 \quad (2.52)$$

die verbleibende 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung abschätzbar.

2.3.1 SLOCC Klassifizierung von 4-Qubit Zuständen

Die SLOCC Klassifizierung von 4-Qubit Zuständen wird in Arbeiten von Miyake [87] und Verstraete et al. [116] diskutiert. Beide kommen durch unterschiedliche Ansätze auf eine ähnliche Struktur.

Die Klassifizierung von Verstraete et al. basiert auf einer Verallgemeinerung der Singulärwertzerlegung auf komplexe orthogonale Äquivalenzklassen. Das Ergebnis sind neun unterschiedliche Familien von Zuständen. Jeder 4-Qubit Zustand kann dann über SLOCC Transformationen einer der Familien zugeordnet werden. Verstraete et al. behaupten, daß der folgende Zustand $|G_{abcd}\rangle$, derjenige mit maximaler 4-Qubit Verschränkung ist:

$$\begin{aligned} |G_{abcd}\rangle = & \frac{a+d}{2}(|0000\rangle + |1111\rangle) + \frac{a-d}{2}(|0011\rangle + |1100\rangle) \\ & + \frac{b+c}{2}(|0101\rangle + |1010\rangle) + \frac{b-c}{2}(|0110\rangle + |1001\rangle). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Der Ansatz von Miyake gründet auf einer Dualität zwischen verschränkten und separierbaren Zuständen. Er leitet aus dieser Dualität die Verbindung zwischen Hyperdeterminanten und Verschränkungsmessung ab. Hyperdeterminanten [49] sind die Verallgemeinerung von Determinanten auf Hypermatrizen. Sie sind invariant unter Wirkung der Gruppe $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times \dots \times SL(2, \mathbb{C})$, der Gruppe der SLOCC Transformationen. Deswegen werden sie als mögliches Maß einer N -Qubit Verschränkung in einem N -Qubit Zustand diskutiert. Für zwei Qubits entspricht die Hyperdeterminante gleich der Concurrence:

$$C = 2|DetA_2| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|. \quad (2.54)$$

Für drei Qubits entspricht sie dem Tangle:

$$\tau_{123} = 4|DetA_3| \quad (2.55)$$

mit einem allgemeinen 3-Qubit Zustand $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^8 \alpha_i |i\rangle$ in der Standardbasis und

$$\begin{aligned} \text{Det} A_3 = & \alpha_1^2 \alpha_8^2 + \alpha_2^2 \alpha_7^2 + \alpha_3^2 \alpha_6^2 + \alpha_5^2 \alpha_4^2 + 4(\alpha_1 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_7 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_6) \\ & - 2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_7 \alpha_8 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_8 + \alpha_1 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_8 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_6 \alpha_7 + \alpha_2 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_7 + \alpha_2 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_6). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die abgeleitete SLOCC Klassifizierung von Miyake hat als Repräsentanten in der äußersten 4-Qubit Verschränkungsklasse den folgenden Zustand:

$$\begin{aligned} |G_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle = & \alpha(|0000\rangle + |1111\rangle) + \beta(|0011\rangle + |1100\rangle) \\ & + \gamma(|0101\rangle + |1010\rangle) + \delta(|0110\rangle + |1001\rangle) \end{aligned} \quad (2.57)$$

mit komplexen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dieser ist äquivalent zu G_{abcd} , vgl. (2.53). Das Kriterium zur Klassenzugehörigkeit, ist eine von Null verschiedene Hyperdeterminante $\text{Det} A_4$:

$$\begin{aligned} \text{Det} A_4 = & \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2 (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 (\alpha + \beta + \gamma - \delta)^2 (\alpha + \beta - \gamma + \delta)^2 (\alpha - \beta + \gamma + \delta)^2 \\ & (-\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 (\alpha - \beta + \gamma - \delta)^2 (\alpha - \beta - \gamma + \delta)^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Zu beachten ist, daß der 4-Qubit GHZ-Zustand $(|0000\rangle + |1111\rangle)/\sqrt{2}$, der die Bell Ungleichungen maximal verletzt, nicht in der Klasse enthalten ist, da für diesen Zustand die Hyperdeterminante gleich Null ist.

Die SLOCC Bedingungen von Li et al. [77] können auch für bestimmte 4-Qubit Zustände abgeleitet werden. Beispielsweise lauten die Bedingungen für die SLOCC Äquivalenz eines allgemeinen 4-Qubit Zustandes in der Standardbasis, $|\phi_0\rangle = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i |i\rangle$, mit dem 4-Qubit GHZ-Zustand:

$$(\alpha_3 \alpha_{14} - \alpha_4 \alpha_{13}) + (\alpha_5 \alpha_{12} - \alpha_6 \alpha_{11}) \neq (\alpha_1 \alpha_{16} - \alpha_2 \alpha_{15}) + (\alpha_7 \alpha_{10} - \alpha_8 \alpha_9) \quad (2.59)$$

$$(\alpha_2 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_6)(\alpha_{12} \alpha_{15} - \alpha_{11} \alpha_{16}) = (\alpha_4 \alpha_7 - \alpha_3 \alpha_8)(\alpha_{10} \alpha_{13} - \alpha_9 \alpha_{14}) \quad (2.60)$$

$$(\alpha_5 \alpha_8 - \alpha_6 \alpha_7)(\alpha_9 \alpha_{12} - \alpha_{10} \alpha_{11}) = (\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3)(\alpha_{13} \alpha_{16} - \alpha_{14} \alpha_{15}) \quad (2.61)$$

$$(\alpha_4 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_8)(\alpha_{11} \alpha_{13} - \alpha_9 \alpha_{15}) = (\alpha_3 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_7)(\alpha_{12} \alpha_{14} - \alpha_{10} \alpha_{16}). \quad (2.62)$$

Falls diese Bedingungen erfüllt sind, kann der Zustand unter SLOCC Transformationen in den GHZ-Zustand überführt werden.

2.3.2 Hyperdeterminanten und Polynomiale Invarianten

In [79] beschreiben Luque und Thibon die Algebra der Polynome auf dem Hilbertraum der 4-Qubit Zustände, die invariant unter SLOCC Transformationen sind. Sie konnten einen vollständigen Satz von vier algebraisch unabhängigen Invarianten mit Grad 2,4,4,6 finden. Dieser Satz $[H, L, M, D_{xt}]$, kann in den komplexen Koeffizienten eines generalisierten 4-Qubit Zustandes dargestellt werden. Weiterhin konnte dadurch eine allgemeine Darstellung der 4-Qubit Hyperdeterminante gefunden werden. In der Standardbasis wird solch ein allgemeiner 4-Qubit Zustand als:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k,l=0}^1 a_{ijkl} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle \otimes |l\rangle \quad (2.63)$$

geschrieben. Luque und Thibon untersuchten nun die, unter der SLOCC Gruppe $SL(2, \mathbb{C})^4$, invarianten Funktionen $f(a_{ijkl})$. Diese a_{ijkl} lassen sich als Koeffizienten einer quadrilinearen Form:

$$A(x, y, z, t) = \sum_{i,j,k,l=0}^1 a_{ijkl} x_i y_j z_k t_l \quad (2.64)$$

auffassen. Die a_{ijkl} kann man binär kodieren, d.h. mit $\alpha_i, i \in [1, 16]$ um die Schreibweise abzukürzen.

Obige quadrilineare Form A hat eine Invariante H vom Grad 2:

$$H = \alpha_1 \alpha_{16} - \alpha_2 \alpha_{15} - \alpha_3 \alpha_{14} + \alpha_4 \alpha_{13} - \alpha_5 \alpha_{12} + \alpha_6 \alpha_{11} + \alpha_7 \alpha_{10} - \alpha_8 \alpha_9 \quad (2.65)$$

Die zwei Invarianten mit Grad 4 sind zwei, folgender drei Determinanten:

$$L = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_5 & \alpha_9 & \alpha_{13} \\ \alpha_2 & \alpha_6 & \alpha_{10} & \alpha_{14} \\ \alpha_3 & \alpha_7 & \alpha_{11} & \alpha_{15} \\ \alpha_4 & \alpha_8 & \alpha_{12} & \alpha_{16} \end{vmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_9 & \alpha_3 & \alpha_{11} \\ \alpha_2 & \alpha_{10} & \alpha_4 & \alpha_{12} \\ \alpha_5 & \alpha_{13} & \alpha_7 & \alpha_{15} \\ \alpha_6 & \alpha_{14} & \alpha_8 & \alpha_{16} \end{vmatrix} \quad N = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_9 & \alpha_{10} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_{15} & \alpha_{16} \end{vmatrix} \quad (2.66)$$

mit $L + M + N = 0$. Um eine Invariante mit Grad 6 zu konstruieren verwendeten Luque und Thibon Methoden der klassischen Invariantentheorie [93]. Der genaue Weg ist in [79] beschrieben. Diese Invariante kann in den α_i dargestellt werden als:

$$\begin{aligned} D_{xt} = & \left(-\alpha_{12} \alpha_{14} + \alpha_{16} \alpha_{10} \right) \left(-(\alpha_4 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_7 - \alpha_1 \alpha_8)(-\alpha_1 \alpha_{15} + \alpha_{13} \alpha_3 + \alpha_{11} \alpha_5 - \alpha_7 \alpha_9) + \right. \\ & (\alpha_3 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_7)(-\alpha_2 \alpha_{15} - \alpha_1 \alpha_{16} + \alpha_{14} \alpha_3 + \alpha_{13} \alpha_4 + \alpha_{12} \alpha_5 + \alpha_{11} \alpha_6 - \alpha_8 \alpha_9 - \alpha_7 \alpha_{10}) \Big) + \\ & \left(-\alpha_{11} \alpha_{13} + \alpha_{15} \alpha_9 \right) \\ & \left(-(\alpha_4 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_8)(-\alpha_2 \alpha_{15} - \alpha_1 \alpha_{16} + \alpha_{14} \alpha_3 + \alpha_{13} \alpha_4 + \alpha_{12} \alpha_5 + \alpha_{11} \alpha_6 - \alpha_8 \alpha_9 - \alpha_7 \alpha_{10}) + \right. \\ & (\alpha_4 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_7 - \alpha_1 \alpha_8)(-\alpha_2 \alpha_{16} + \alpha_{14} \alpha_4 + \alpha_{12} \alpha_6 - \alpha_8 \alpha_{10}) \Big) - \\ & \left(-\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{14} + \alpha_{16} \alpha_9 + \alpha_{15} \alpha_{10} \right) \\ & \left((\alpha_4 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_8)(\alpha_1 \alpha_{15} - \alpha_{13} \alpha_3 - \alpha_{11} \alpha_5 + \alpha_7 \alpha_9) + \right. \\ & \left. (-\alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_7)(\alpha_2 \alpha_{16} - \alpha_{14} \alpha_4 - \alpha_{12} \alpha_6 + \alpha_8 \alpha_{10}) \right). \quad (2.67) \end{aligned}$$

Die Folge $[H, L, M, D_{xt}]$ der Generatoren der Algebra Polynomialer Invarianten ist vollständig. Nun kann man die Hyperdeterminante $Det A_4$ als Funktion der Invarianten darstellen. Luque und Thibon identifizierten dazu die Diskriminante Δ einer binären quartischen Form. Diese hat zwei Invarianten S und T , die mit der Diskriminanten über:

$$\Delta = S^3 - 27T^2 \quad (2.68)$$

zusammenhängen. Dieses Δ ist äquivalent zur Hyperdeterminante $Det A_4$. Luque und Thibon gaben weiterhin S und T als Funktion obiger H, L, M und D_{xt} an:

$$S = \frac{1}{12} H^4 - \frac{2}{3} H^2 L + \frac{2}{3} H^2 M - 2 H D_{xt} + \frac{4}{3} (L^2 + L M + M^2) \quad (2.69)$$

$$T = \frac{1}{216}H^6 - \frac{1}{18}H^4(L - M) - \frac{1}{6}H^3D_{xt} + \frac{1}{9}H^2(2L^2 - LM + 2M^2) \\ + \frac{2}{3}H(L - M)D_{xt} - \frac{8}{27}(L^3 - M^3) - \frac{4}{9}LM(L - M) + D_{xt}^2 \quad (2.70)$$

Im nächsten Abschnitt werden die Invarianten H, L, M, N, D_{xt}, S, T und Δ für verschiedene parameterabhängige Zustände untersucht und mit den oben eingeführten Verschränkungsmaßen verglichen.

Äquivalente Invarianten sind weiterhin von Emary [42] und Lévy [76] mit unterschiedlichen Ansätzen abgeleitet worden. Einen Vorschlag, um solche Invarianten experimentell zu bestimmen, machen Leifer et al. [75]. Sumner und Jarvis [107] benutzten Verschränkungsinvarianten für Fragestellungen aus der Biologie, exakter, der Phylogenetik.

2.3.3 Charakterisierung von 4-Qubit Beispielszuständen

In diesem Abschnitt werden die oben vorgestellten Invarianten mit den beschriebenen optimierten Bell Ungleichungen und der abgewandelten CKW Ungleichung verglichen. Es stellt sich heraus, daß die beiden Maße und eine der Invarianten bei Anwendung auf verschiedene parameterabhängige 4-Qubit Zustände gleiches Verhalten in der Parameterabhängigkeit zeigen. Die näher betrachteten Zustände gehören verschiedenen Verschränkungsklassen an. Ein Teil der Zustände ($|\phi_{14}\rangle, |\phi_{15}\rangle$ und der parameterabhängige GHZ-Zustand) wurde ebenfalls bereits in [43, 44] behandelt. Eine genauere Aufstellung der jeweiligen Verschränkungsmaße befindet sich in Anhang A.

2.3.3.1 Parameterabhängiger 4-Qubit GHZ Zustand

Man nimmt an, daß der parameterabhängige 4-Qubit GHZ Zustand:

$$|\gamma GHZ\rangle = \gamma|0000\rangle + \sqrt{1 - \gamma^2}|1111\rangle \quad (2.71)$$

für $\gamma \in]0, 1[$ 4-Qubit verschränkt ist. Die Concurrence C_{ij} zwischen jedem Qubit Paar ist gleich Null. Das Globale Verschränkungsmaß berechnet sich zu $Q = 4\gamma^2(1 - \gamma^2)$. Die Berechnung der Luque Invarianten liefert:

$$H = \gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \quad (2.72)$$

$$L = M = N = 0 \quad (2.73)$$

$$D_{xt} = 0 \quad (2.74)$$

$$S = \frac{1}{12}\gamma^4(-1 + \gamma^2)^2 \quad (2.75)$$

$$T = -\frac{1}{216}\gamma^6(-1 + \gamma^2)^3 \quad (2.76)$$

$$\Delta = 0. \quad (2.77)$$

Man sieht, daß die Invarianten S und T bis auf einen konstanten Faktor und einer Wurzel mit Q übereinstimmen:

$$S = \frac{1}{192}Q^2 \quad T = \frac{1}{13824}Q^3 \quad (2.78)$$

Da \sqrt{S} und Q äquivalent sind, wird im folgenden die Quadratwurzel von S verwendet. In Abb. 2.5 sind die Globalverschränkung Q , \sqrt{S} und das Ergebnis der Belloptimierung als Funktion von γ^2 aufgetragen. Obwohl die Belloptimierung für den parameterabhängigen GHZ-Zustand einige Schwierigkeiten bei $\gamma \sim 0$ und $\gamma \sim 1$ hat, wie in [43, 44] beschrieben,

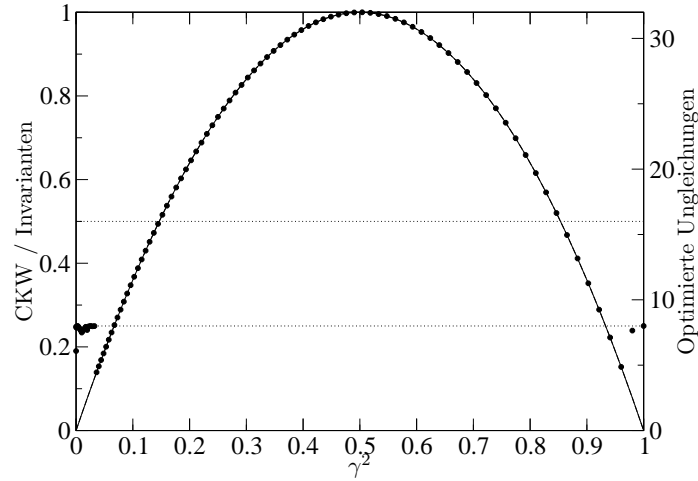


Abbildung 2.5: Optimierte Bell Ungleichungen (schwarze Punkte) auf der rechten y-Achse, Globalverschränkung Q (gestrichelte Linie) und \sqrt{S} Invariante auf der linken y-Achse, als Funktion von γ^2 für den parameterabhängigen GHZ-Zustand. Die gepunktete Linie zeigt die untere Grenze der Bell Bedingung für eine 3-Qubit Verschränkung (≥ 8) bzw. eine 4-Qubit Verschränkung (≥ 16).

stimmen trotzdem alle Größen perfekt überein. Dieser Zustand gehört nicht zur äußersten von Miyake beschriebenen SLOCC Klasse, da das Hyperdeterminantenkriterium ($\Delta = 0$) nicht erfüllt ist. Das Kriterium nach Li et al., ob der Zustand SLOCC invariant zum GHZ-Zustand ist:

$$-\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \neq 0 \quad (2.79)$$

ist natürlich für $\gamma \in]0, 1[$ erfüllt.

2.3.3.2 Heisenberg Zustand $|\phi_{15}\rangle$

Die Charakterisierung des nächsten Zustandes ist im Vergleich mit den bisher behandelten Zuständen komplexer. $|\phi_{15}\rangle$ ist Eigenzustand eines speziellen 4-Qubit Heisenberg-Modells, mit antiferromagnetischen Kopplungskonstanten J und J_s , beide ≥ 0 :

$$|\phi_{15}\rangle = \beta_1(-|0011\rangle + |0110\rangle - |1001\rangle + |1100\rangle) + \beta_2(-|0101\rangle + |1010\rangle) \quad (2.80)$$

mit den zwei Amplituden β_1 and β_2 , gegeben durch

$$\beta_1 = (4 + (-J + 2J_s + \delta)^2 / (2J^2))^{-1/2} \quad (2.81)$$

$$\beta_2 = (4 + (-J + 2J_s + \delta)^2 / (2J^2))^{1/2} J / (2\delta) \quad (2.82)$$

und der verwendeten Abkürzung $\delta = (9J^2 - 4JJ_s + 4J_s^2)^{1/2}$ (vgl. Anhang A).

Aus der Optimierung der Bell Ungleichungen ist bekannt, daß dieser Zustand die Bedingung für eine 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung erfüllt. Die Globalverschränkung Q ist konstant ($Q = 1$), unabhängig von der Wahl der Parameter. Die Parameterabhängigkeit der optimierten Ungleichungen ist im Verlauf mit der CKW Ungleichung vergleichbar. Die Parameterabhängigkeit beider Maße ist in Abb. 2.6 als Funktion von J mit konstantem $J_s = 2$ bzw. als Funktion von J_s mit konstantem $J = 2$ aufgetragen.

Die Berechnung der Luque/Thibon Invarianten liefert folgendes Ergebnis:

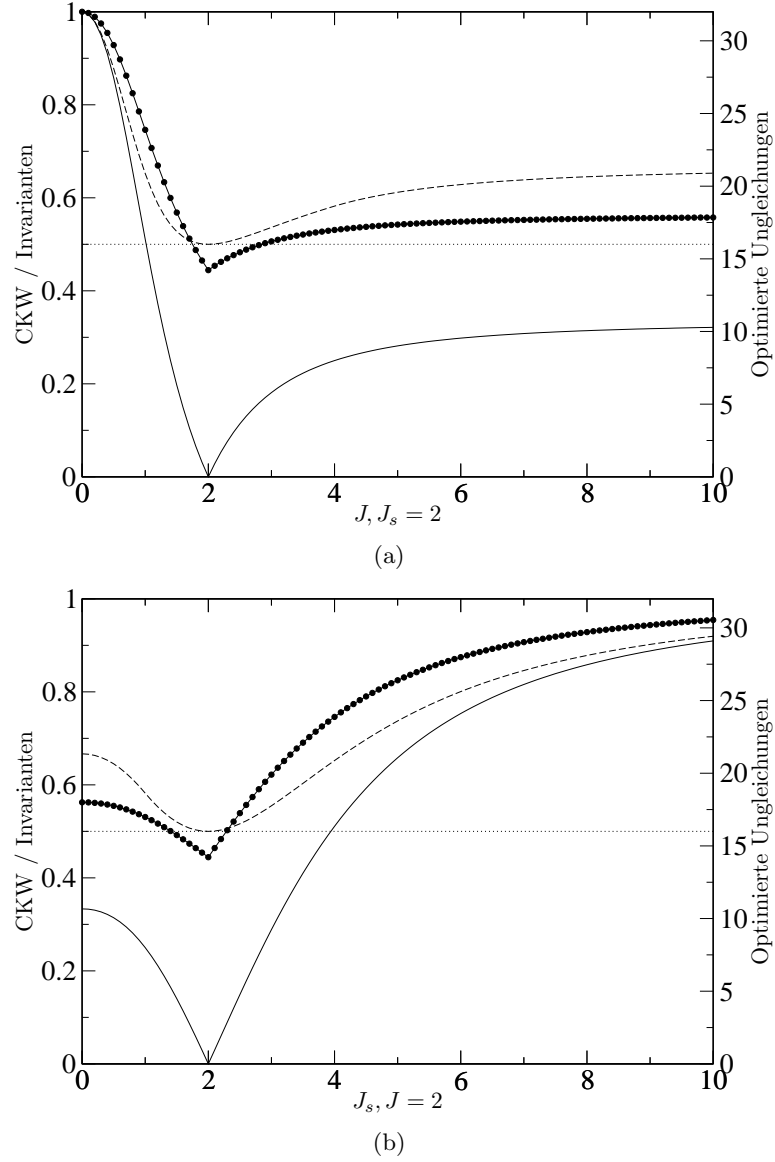


Abbildung 2.6: Optimierte Ungleichungen (Linie mit Punkten) auf der rechten y-Achse, CKW Abschätzung (gestrichelte Linie) und \sqrt{S} Invariante (durchgezogene Linie) auf der linken y-Achse; (a): als Funktion von J mit konst. $J_s = 2$. bzw. (b): J_s mit konst. $J = 2$, für den Zustand $|\phi_{15}\rangle$. Die gepunktete Linie zeigt die untere Grenze der Bell Bedingung für eine 4-Qubit Verschränkung (≥ 16). J und J_s sind komplizierte Funktionen von β_1 und β_2 (siehe Text).

$$H = -2\beta_1^2 - \beta_2^2 \quad (2.83)$$

$$L = -N = \beta_1^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) \quad (2.84)$$

$$M = 0 \quad (2.85)$$

$$D_{xt} = -\beta_1^2\beta_2^4 \quad (2.86)$$

$$S = \frac{1}{12}\beta_2^4(-4\beta_1^2 + \beta_2^2)^2 \quad (2.87)$$

$$T = \frac{1}{216}\beta_2^6(-4\beta_1^2 + \beta_2^2)^3 \quad (2.88)$$

$$\Delta = 0. \quad (2.89)$$

In Abb. 2.6 ist zusätzlich der Verlauf der auf 1 normierten Invarianten \sqrt{S} aufgetragen. Alle drei betrachteten Größen zeigen gleiches Verhalten. Die Übereinstimmung ist gut an den Maxima bzw. Minima zu sehen. Für $J = 0, J_s = 2$ bzw. $J = 2, J_s \rightarrow \infty$ zeigen alle drei Größen eine maximale 4-Qubit Verschränkung an. In diesen Grenzfällen nimmt der Zustand GHZ Form an. Auch im Minimum $J = 2, J_s = 2$ herrscht Übereinstimmung. Da die Invariante Δ gleich Null ist, gehört der Zustand nicht zur $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ Klasse. Aber der Zustand erfüllt fast für alle Parameter, bis auf einen schmalen Bereich um $J = J_s = 2$, die Bell Bedingung für eine 4-Qubit Verschränkung. Testet man nun die Klassifikationskriterien nach Li et al. für die SLOCC Äquivalenz mit dem GHZ-Zustand, so erhält man folgende Gleichungen:

$$2\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0, \quad -\beta_1^4 = 0 \quad \text{and} \quad \beta_1^2\beta_2^2 = 0. \quad (2.90)$$

Diese werden für $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 \neq 0$ gelöst. Das stimmt mit den Grenzwerten $J_s = 2, J \rightarrow 0$ und $J = 2, J_s \rightarrow \infty$ überein. Wie bereits angesprochen, reduziert sich der Zustand auf einen GHZ-Typ, $|\phi_{15}\rangle \approx (-|0101\rangle + |1010\rangle)/\sqrt{2}$. In allen anderen Fällen, d.h. $\beta_1 \neq 0$, muß der Zustand noch einer Klasse zugeordnet werden.

2.3.3.3 Miyake Zustand $|G_{\alpha\gamma}\rangle$

In diesem Teilabschnitt wird explizit ein Zustand mit $\Delta \neq 0$ untersucht. Dazu wird der ursprüngliche Miyake Zustand $|G_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle$ (2.57) um mehrere Parameter reduziert. Setzt man $\beta = \delta = \gamma$ und $2\alpha^2 + 6\gamma^2 = 1$, so wird:

$$|G_{\alpha\gamma}\rangle = \alpha(|0000\rangle + |1111\rangle) + \gamma(|0011\rangle + |1100\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle), \quad (2.91)$$

wobei α bzw. γ reell gewählt werden, also $\gamma \in [0, 1/\sqrt{6}]$. Die Globalverschränkung Q für diesen Zustand ist parameterunabhängig, $Q = 1$. Die Berechnung der Concurrences zeigt die Gleichheit aller, $C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{23} = C_{24} = C_{34}$, mit

$$C_{12} = \begin{cases} 4\gamma(\alpha - \gamma) & \text{if } 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 2(\gamma^2 - \alpha^2) & \text{if } \frac{1}{2\sqrt{2}} < \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (2.92)$$

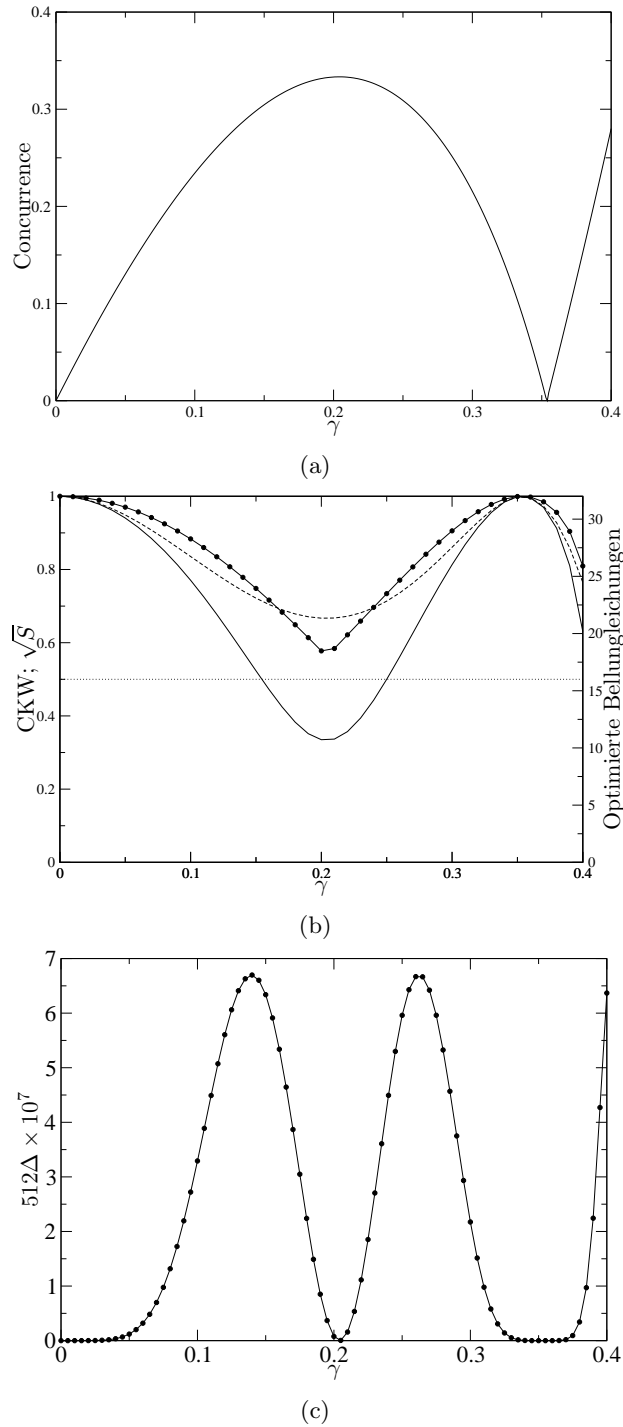


Abbildung 2.7: Verschränkungsmaße des Miyake Zustandes $|G_{\alpha\gamma}\rangle$ als Funktion des Parameters γ . (a): Concurrence; (b): Optimierte Ungleichungen (Linie mit Punkten) auf der rechten y-Achse, CKW Abschätzung (gestrichelte Linie) und \sqrt{S} Invariante (durchgezogene Linie) auf der linken y-Achse. Die gepunktete Linie zeigt die untere Grenze der Bell Bedingung für eine 4-Qubit Verschränkung (≥ 16). (c): Invariante Δ als Funktion von γ .

und α wie oben definiert. In Abb. 2.7a ist die Concurrence als Funktion des Parameters γ aufgetragen. Die Berechnung der Luque/Thibon Invarianten liefert:

$$H = 1/2 \quad (2.93)$$

$$L = M = N = 0 \quad (2.94)$$

$$D_{xt} = \frac{1}{4}\gamma^2(1 - 8\gamma^2)^2 \quad (2.95)$$

$$S = \frac{1}{192} - \frac{1}{4}\gamma^2(1 - 8\gamma^2)^2 \quad (2.96)$$

$$T = \frac{1}{13824} - \frac{\gamma^2}{192} + \frac{7\gamma^4}{48} - \frac{7\gamma^6}{3} + 24\gamma^8 - 128\gamma^{10} + 256\gamma^{12} \quad (2.97)$$

$$\Delta = -\frac{1}{512}(6\gamma^2 - 1)(24\gamma^2 - 1)^2(8\gamma^3 - \gamma)^6. \quad (2.98)$$

Abb. 2.7b vergleicht die Parameterabhängigkeit der betrachteten Maße. Wieder zeigt sich, daß der Verlauf der auf 1 normierten Invarianten \sqrt{S} , der CKW Ungleichung und der optimierten Bellungleichungen dieselbe Parameterabhängigkeit liefert. Für $\gamma = 0$ nimmt der Zustand GHZ Form an, $|G_{\alpha\gamma}\rangle = (|0000\rangle + |1111\rangle)/\sqrt{2}$ und alle drei betrachteten Größen haben ein Maximum. Auch die Minima bei $\gamma = 1/2\sqrt{2}$ und die Maxima bei $\gamma = 1/2\sqrt{6}$ stimmen gut überein.

Der Zustand $|G_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle$ ist der Repräsentant der äußersten SLOCC Verschränkungsklasse mit dem Kriterium $\Delta \neq 0$. Auch für den speziell gewählten Zustand $|G_{\alpha\gamma}\rangle$ ist die Hyperdeterminante Δ verschieden von Null, mit Ausnahme von $\gamma = 0, \pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{8}, \pm 1/\sqrt{24}$. Diese Maxima stimmen mit den Maxima bzw. Minima von \sqrt{S} perfekt überein. Abb. 2.7c beinhaltet ergänzend den Verlauf der Hyperdeterminanten Δ .

Die Kriterien nach Li et al. zur SLOCC Äquivalenz mit dem GHZ Zustand berechnen sich zu:

$$-\alpha^2 - 3\gamma^2 \neq 0 \quad \wedge \quad \alpha^2\gamma^2 - \gamma^4 = 0. \quad (2.99)$$

Für eine der Nullstellen von Δ , $\gamma = 1/\sqrt{8}$, sind diese Bedingungen erfüllt.

2.3.3.4 Heisenberg Zustand $|\phi_{14}\rangle$

Zuletzt ein Zustand, dessen Verschränkungsstruktur mit vorhandenen Mitteln vollständig zu erklären ist. Der Zustand

$$|\phi_{14}\rangle = \epsilon_1|1110\rangle + \epsilon_2|1011\rangle + \epsilon_3|0111\rangle - \epsilon_3|1101\rangle \quad (2.100)$$

mit $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\epsilon_3^2 = 1$ ist ebenfalls Eigenzustand der oben erwähnten 4-Qubit Heisenbergketten (vgl. Anhang A). Da er allgemeine W-Form (2.44) hat, stimmt die Globalverschränkung Q mit der Summe der quadrierten Concurrences überein, vgl. (2.45). Der Zustand enthält also nur 2-Qubit Verschränkungen. Die optimierten Bell Ungleichungen erfüllen nicht die Bedingung einer 4-Qubit Verschränkung. Die genaue Darstellung der Maße befindet sich in Anhang A. Die Luque/Thibon Invarianten sind für diesen Zustand alle gleich Null, liefern also keine Information über die Verschränkungsstruktur.

Eine weitere interessante Beobachtung ergibt sich bei Betrachtung der Invarianten H . Diese Invariante und die Ungleichung der Li et al. Kriterien für die SLOCC Äquivalenz zum GHZ-Zustand stimmen bei allen Beispielen, bis auf ein Minuszeichen, überein. Eine von Null verschiedene Invariante ist somit ein Kriterium für die SLOCC Äquivalenz zum GHZ-Zustand.

2.4 Diskussion

In Kapitel 2 wurden die Grundlagen der Verschränkungstheorie erläutert. Die Charakterisierung reiner 2- und 3-Qubit Zustände stellt kein Problem dar und ist bereits vollständig geklärt. Mit den Concurrences und dem Tangle Maß lassen sich die 2-Qubit und die 3-Qubit Verschränkungen bestimmen. Für die Charakterisierung eines 4-Qubit Zustandes stehen nur ein 2-Qubit Maß und die Globalverschränkung Q zur Verfügung. Der Rest, eine 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung, kann aber mit der CKW Ungleichung und optimierten Bell Ungleichungen abgeschätzt werden. Diese wurde mit Polynomialen Invarianten verglichen. Es stellte sich heraus, daß eine der Invarianten geeignet ist die übrigbleibende Verschränkung zu messen.

Kapitel 3

Diskrete Quantum Walk Modelle

Der klassische Random Walk wird meist mit der Bewegung eines Betrunkenen verglichen. Dieser macht mit einer Wahrscheinlichkeit p einen Schritt nach links, und mit einer Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ einen Schritt nach rechts. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei t -maliger Wiederholung dieser Bewegung das Ereignis *Schritt nach links* genau k -mal eintritt durch:

$$P_t(k) = \binom{t}{k} p^k (1 - p)^{t-k} \quad (3.1)$$

gegeben. Dies ist die Wahrscheinlichkeit, den Betrunkenen zum Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort x zu finden. Man erhält eine Binomialverteilung, der Mittelwert bei einer ungerichteten Bewegung ($p = 1/2$) ist $\langle x \rangle = 0$, mit dem Ursprung als Startpunkt. Die Varianz ist proportional zu t , $\sigma^2(x) = t$.

Der diskrete Quantum Walk ist identisch aufgebaut. Man betrachtet die Dynamik eines Quantensystems auf einem diskreten Gitter, erhält aber ein komplett anderes Verhalten als im klassischen Fall. In diesem Kapitel werden nun einfache Modelle des diskreten QW behandelt. Einerseits zum Überblick über vorhandene Literatur, andererseits zur Vorbereitung auf die folgenden Kapitel. Beginnend mit dem einfachsten Modell: ein unendliches eindimensionales Gitter mit einer Münze (engl. Coin). Das Modell wird ausführlich behandelt, analytische Lösungsmöglichkeiten auf der einen Seite und Vereinfachungen zur numerischen Simulation auf der anderen Seite, werden aufgezeigt. Das Modell ist in mehrere Richtungen erweiterbar. Zum einen durch die Anzahl der verwendeten Coins, zum anderen durch eine Erhöhung der Dimensionalität des Ortsraumes. Diese Zusätze machen es in späteren Kapiteln möglich, den Einfluß von Multiqubit Zuständen auf die Verteilungen der QW Modelle zu studieren und so Zusammenhänge zwischen Verschränkungsmaßen und Ortskorrelationen herzustellen. Ein weiterer Ansatz betrachtet das Hinzufügen von Nichtlinearitäten, meist ortsabhängigen Phasen, wodurch die Beziehung zu Quantenchaos-Modellen hergestellt wird. Innerhalb eines solchen Modells wird die Verbindung zwischen Verschränkung und Ortsverteilung bereits sichtbar.

3.1 Eindimensionale QW Modelle

Das einfachste Modell eines diskreten QW beschreibt die Bewegung eines 2-Level Quantensystems (Qubit) auf einem eindimensionalen Gitter mit g Gitterpunkten. Der Hilbertraum H des Gesamtsystems wird durch einen g -dimensionalen Ortsraum H_P (Positionspace) und einen 2-dimensionalen Münzraum (Coinraum, Coinspace) H_C beschrieben,

$H = H_P \otimes H_C$. Die g -dimensionalen Basisvektoren des Ortsraumes werden mit $\{|x\rangle\}$ bezeichnet, die zweidimensionale Basis des Coinraumes mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

Die Bewegung des Systems erfolgt nun nach einem festgelegtem Muster in zwei Schritten. Zuerst wird die Münze geworfen, d.h. die Anwendung eines Coinoperators \hat{C} . Danach erfolgt die Bewegung auf dem Gitter, in Abhängigkeit des Wurfergebnisses, mittels eines Bewegungsoperators \hat{S} (Shiftoperator). Diese beiden Operationen definieren einen Zeitschritt. Der Gesamtzustand nach t Zeitschritten ergibt sich zu:

$$|\psi(t)\rangle = (\underbrace{\hat{S}\hat{C}}_{:=\hat{E}})^t |\psi(t_0)\rangle = \hat{E}^t |\psi(t_0)\rangle, \quad (3.2)$$

mit $|\psi(t_0)\rangle =: |\psi(t=0)\rangle$. Beide Operatoren sind folgendermaßen aufgebaut. Der Coinoperator \hat{C} ist das Produkt eines Würfeloperators im Coinraum und eines Einsoperators im Ortsraum $\mathbb{1}_P$. Als Standard Würfeloperator dient der Hadamardoperator \hat{H} :

$$\hat{C} = \mathbb{1}_P \otimes \hat{H}. \quad (3.3)$$

Er ist durch seine Wirkung auf die Coinbasis $|0\rangle, |1\rangle$ definiert:

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (3.4)$$

Ordnet man dieser Basis entsprechende Vektoren zu:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

so erhält man die Standardform des Hadamardoperators:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Die coinabhängige Bewegung auf dem Gitter wird durch den Shiftoperator \hat{S} erzeugt:

$$\hat{S} = \sum_x |x+1\rangle\langle x| \otimes |0\rangle\langle 0| + \sum_x |x-1\rangle\langle x| \otimes |1\rangle\langle 1| \quad (3.7)$$

$$= \hat{S}^{+1} \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{S}^{-1} \otimes |1\rangle\langle 1|, \quad (3.8)$$

mit der abkürzenden Schreibweise für die einzelnen Bewegungsrichtungen:

$$\hat{S}^{+1} := \sum_x |x+1\rangle\langle x| \quad \hat{S}^{-1} := \sum_x |x-1\rangle\langle x| \quad (3.9)$$

Aufgrund der Verwendung des Hadamardoperators wird dieses QW Modell auch als Hadamard Walk bezeichnet. Der Zustand zum Zeitpunkt t_0 ist aus einem Anteil im Ortsraum und einem Anteil im Coinraum aufgebaut:

$$|\psi(t_0)\rangle = |x_0\rangle \otimes |\psi_C(t_0)\rangle. \quad (3.10)$$

Im Normalfall startet der Walker auf einer lokalisierten Position im Ortsraum. In den Arbeiten von Abal et al. [1,2] wird näher auf nichtlokalisierte Startzustände im Ortsraum eingegangen.

Die Dynamik des Quantum Walk ist am besten graphisch darstellbar. Dazu betrachtet

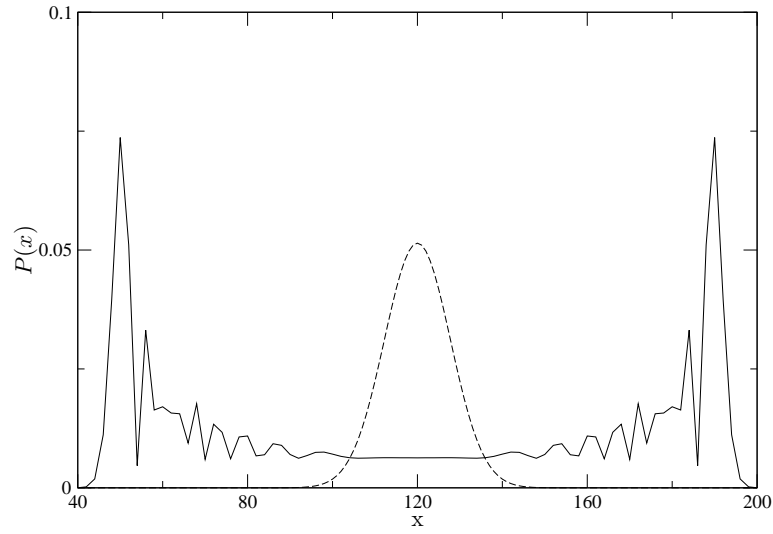


Abbildung 3.1: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen eines klassischen (gestrichelte Linie) und eines Quantum Walks nach $t = 100$ Zeitschritten. Der Coin Startzustand ist $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Die Gittergröße ist $g = 240$ und der Startpunkt im Ortsraum 120. Im Quantenfall sind nur die Wahrscheinlichkeiten an geraden Punkten aufgetragen, da die ungeraden nicht besetzt sind.

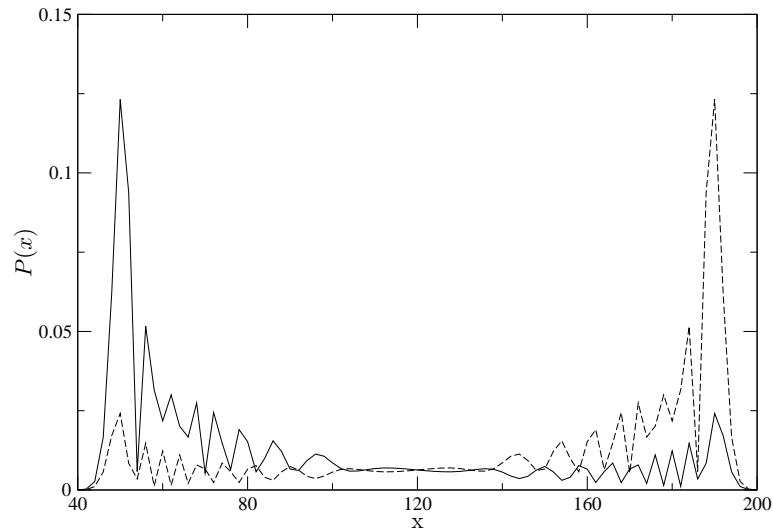


Abbildung 3.2: Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ für einen Quantum Walk mit unterschiedlichen Coin Startzuständen, $|0\rangle$ (gestrichelte Linie) und $|1\rangle$ (durchgezogene Linie), nach $t = 100$ Zeitschritten. Die Gittergröße ist $g = 240$ und der Startpunkt im Ortsraum 120. Im Quantenfall sind nur die Wahrscheinlichkeiten an geraden Punkten aufgetragen.

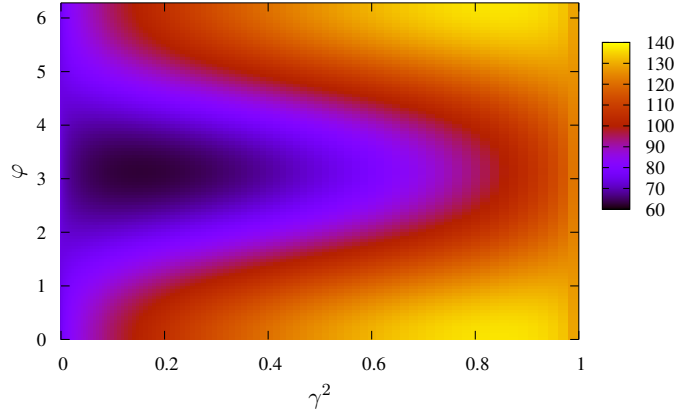


Abbildung 3.3: Mittelwert des eindimensionalen Hadamardwalks für den allgemeinen Coin Startzustand (3.14) in Abhängigkeit der Parameter γ und φ nach $t = 90$ Zeitschritten. Die Gittergröße ist $g = 200$, der Startpunkt im Gitter $x_0 = 100$.

man die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Gitter:

$$P(x, t) = |\langle 0 | \psi(t) \rangle|^2 + |\langle 1 | \psi(t) \rangle|^2 \quad (3.11)$$

Mittelwerte und Varianz lassen sich daraus standardmäßig ableiten. Abb. 3.1 vergleicht die sich ergebende Verteilung eines Hadamardwalks mit der klassischen Verteilung. Die Unterschiede sind leicht erkennbar. Während die klassische Verteilung um den Startpunkt zentriert ist, erkennt man beim Quantum Walk die typisch gezackte Verteilung. Die Momente für große Zeiten sind von Amabinis et al. [8] berechnet worden. Der Mittelwert ist abhängig vom Coin Startzustand a und proportional zur Zeit t :

$$\langle x \rangle_t = a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) t. \quad (3.12)$$

Das Vorzeichen von a bestimmt das Vorzeichen des Mittelwertes bzw. die Bewegungsrichtung. Das zweite Moment ist unabhängig vom Startzustand und geht quadratisch mit der Zeit:

$$\langle x^2 \rangle_t = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) t^2. \quad (3.13)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist somit quadratisch höher als im klassischen Fall. In Abb. 3.2 sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für zwei unterschiedliche Startzustände illustriert. In den Verteilungen spiegelt sich die Konstruktion des Shiftoperators \hat{S} wieder, vgl. (3.7). Für $|0\rangle$ als Coin Startzustand ist die Wahrscheinlichkeit höher nach rechts zu laufen, für $|1\rangle$ ist sie größer nach links zu laufen. Diese Abhängigkeit erkennt man auch sehr gut bei Betrachtung des Mittelwertes für einen allgemeinen Coin Startzustand [64]:

$$|\psi_C(t_0)\rangle = \gamma|0\rangle + e^{i\varphi} \sqrt{1 - \gamma^2} |1\rangle \quad (3.14)$$

in Abhängigkeit des Parameters γ und der Phase φ . Diese Abhängigkeit ist in Abb. 3.3 zu sehen. Je nach Einstellung von γ läuft der Walker mehr nach links bzw. nach rechts. Die allgemeinen Phase φ kann diese Bewegung dämpfen, wie deutlich für $\varphi = \pi$ zu erkennen

ist.

Es gibt mehrere Möglichkeiten das Modell analytisch zu lösen. Aufgrund der Translationsinvarianz beim unendlichen Gitter, ist eine Fouriertransformation die erste Wahl. Diese Rechnung wurde von Nayak und Vishwanath [90] und Ambainis et al. [8] diskutiert.

Aufgrund des Shiftoperators wird die Wellenfunktion am Ort x zum Zeitpunkt $t+1$ durch die Wellenfunktionen zum Zeitpunkt t an den Orten $x \pm 1$ bestimmt:

$$\psi(x, t+1) = M_+ \psi(x-1, t) + M_- \psi(x+1, t) \quad (3.15)$$

mit M_+, M_- , den jeweiligen Teilen des Würfeloperators. Die Transformation der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ in den k -Raum erfolgt über:

$$\tilde{\psi}(k, t) = \sum_x \psi(x, t) e^{ikx}. \quad (3.16)$$

Im Fourierraum läßt sich nun die Anwendung der Operatoren M_+, M_- zusammenziehen. Dies kann an folgender Rechnung nachvollzogen werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t+1) &= \sum_x (M_+ \psi(x-1, t) + M_- \psi(x+1, t)) e^{ikx} \\ &= e^{ik} M_+ \sum_x \psi(x-1, t) e^{ik(x-1)} + e^{-ik} M_- \sum_x \psi(x+1, t) e^{ik(x+1)} \\ &= (e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_-) \tilde{\psi}(k, t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Im Fourierraum wird also der Übergang von t nach $t+1$ durch Anwendung eines einzelnen Operators ausgeführt:

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = M_k \tilde{\psi}(k, t) \quad (3.18)$$

mit $M_k = e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_-$. Die Zeitentwicklung läßt sich nun einfach berechnen. Durch Diagonalisierung des M_k Operators reduziert sich die t -fache Matrixmultiplikation auf eine Potenzierung der zugehörigen Eigenwerte λ_k^i :

$$\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, t_0) \quad \text{mit} \quad M_k^t = \sum_i (\lambda_k^i)^t |\phi_k^i\rangle \langle \phi_k^i| \quad (3.19)$$

Das Problem stellt die Rücktransformation in den Ortsraum dar. Die exakte Lösung der Integrale ist für beliebige Zeiten nur näherungsweise möglich. Beispielsweise verwenden Nayak und Vishwanath [90] zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für große Zeiten die Methode der stationären Phasen [12].

Zur Berechnung der Verteilungsmomente haben Brun et al. [25] eine elegante Gleichung abgeleitet. Im k -Raum kann die Wirkung des Entwicklungsoperators auf einen an der Stelle $|x_0 = 0\rangle$ im Coinzustand $|\phi_0\rangle$ startenden Walker als

$$\hat{E}(|k\rangle \otimes |\phi_0\rangle) = |k\rangle \otimes \hat{U}_k |\phi_0\rangle \quad (3.20)$$

geschrieben werden, da

$$|0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \quad (3.21)$$

ist. \hat{U}_k ist ein allgemeiner Würfeloperator im k -Raum. (Zur Vereinfachung wird das Dach $\hat{\cdot}$ bei den Operatoren weggelassen.) Die Wellenfunktion zum Zeitpunkt t , $|\Psi(t)\rangle$, ist dann gegeben durch:

$$|\Psi(t)\rangle = E^t |\psi_0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} |k\rangle \otimes (U_k)^t |\phi_0\rangle. \quad (3.22)$$

Wie oben erwähnt, ist die Rücktransformation der Wellenfunktion im allgemeinen kompliziert. Man ist aber nicht an der Wellenfunktion interessiert, sondern nur an den Momenten der Verteilung. Dazu berechnet man die Wahrscheinlichkeit den Walker zum Zeitpunkt t am Ort x zu finden, mit:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \langle \Psi(t) | (|x\rangle\langle x| \otimes \mathbb{1}) | \Psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \int_{-\pi}^{\pi} dk' e^{-ix(k-k')} \langle \phi_0 | (U_k^\dagger)^t (U_{k'})^t | \phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Berechnung des m -ten Momentes erfolgt über:

$$\langle x^m \rangle_t = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_x x^m \int_{-\pi}^{\pi} dk \int_{-\pi}^{\pi} dk' e^{-ix(k-k')} \langle \phi_0 | (U_k^\dagger)^t (U_{k'})^t | \phi_0 \rangle. \quad (3.24)$$

Diese Gleichung lässt sich durch ausnutzen der Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \sum_x x^m e^{-ix(k-k')} = i^m \delta^{(m)}(k - k') \quad (3.25)$$

vereinfachen zu:

$$\langle x^m \rangle_t = \frac{i^m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \int_{-\pi}^{\pi} dk' \delta^{(m)}(k - k') \langle \phi_0 | (U_k^\dagger)^t (U_{k'})^t | \phi_0 \rangle \quad (3.26)$$

Die Ableitung der δ -Funktion kann durch partielle Integration umgangen werden und man erhält so einen allgemeinen Ausdruck für das m -te Moment:

$$\langle x^m \rangle = \frac{i^m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \langle \phi_0 | (U_k^\dagger)^t \left[\frac{d^m}{dk^m} U_k^t \right] | \phi_0 \rangle. \quad (3.27)$$

Neben der Fouriertransformation sind noch weitere Lösungsmethoden auf das Quantum Walk Problem angewandt worden. Die Lösung mittels Pfadintegralmethode / Kombinatorik wird von Ambainis et al. [8] und Carteret et al. [29] diskutiert. Konno et al. [73] nutzen die Algebra des Matrixoperators. Methoden der klassischen Wellenoptik werden durch Knight et al. [69] beschrieben. In der Arbeit von Romanelli et al. [98] wird die Dynamik des QW in einen Markovschen Anteil und einen Interferenzterm zerlegt.

Um den Quantum Walk simulieren zu können, ist es hilfreich Rekursionsrelationen für die Amplituden des Coinzustandes am Ort x abzuleiten, was in mehreren Arbeiten demonstriert wurde, vgl. [8]. Eine direkte numerische Umsetzung der Matrizen ist natürlich auch möglich, man stößt aber schnell an die Grenzen des Arbeitsspeichers. Bei eindimensionalen Modellen beispielsweise, benötigt die Simulation in Matrixdarstellung Speicherplatz für komplexe Matrizen der Dimension $(2 \times g, 2 \times g)$, wobei g die Gittergröße ist. Die Methode der Rekursionsrelationen reduziert das Ganze auf zwei komplexe Vektoren der Länge g . Dies hat entscheidenden Vorteil bei höherdimensionalen Modellen, da hier die Größe des Arbeitsspeichers über die Durchführbarkeit der Simulation entscheidet.

Der Zustand zum Zeitpunkt t lässt sich allgemein als Summe der Zustände in der Coinbasis am Ort x schreiben:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_x a(x, t) |x, 0\rangle + b(x, t) |x, 1\rangle, \quad (3.28)$$

wobei $|a(x, t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit angibt, den Walker am Ort x im Coinzustand $|0\rangle$ zu finden. Und $|b(x, t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit ist, den Walker am Ort x im Coinzustand $|1\rangle$

zu finden. $|x, 0\rangle$ ist eine Kurzschreibweise für $|x\rangle \otimes |1\rangle$. Die Wirkungen des Coinoperators \hat{C} und des Shiftoperators \hat{S} auf diese Zustände lassen sich wie folgt darstellen:

$$\hat{C}|x, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, 0\rangle + |x, 1\rangle) \quad \hat{C}|x, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, 0\rangle - |x, 1\rangle) \quad (3.29)$$

$$\hat{S}|x, 0\rangle = |x+1, 0\rangle \quad \hat{S}|x, 1\rangle = |x-1, 0\rangle. \quad (3.30)$$

Ein Schritt in der Zeitentwicklung ist dann, wie oben definiert, erst die Verwendung des Coinoperators, gefolgt durch die Anwendung des Shiftoperators:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{S}\hat{C}|\psi(t-1)\rangle, \quad (3.31)$$

wobei $|\psi(t-1)\rangle$ gegeben ist durch:

$$|\psi(t-1)\rangle = \sum_x a(x, t-1)|x, 0\rangle + b(x, t-1)|x, 1\rangle. \quad (3.32)$$

Der Gebrauch der Operatoren liefert nun den Zustand zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit des Zustandes zum Zeitpunkt $t-1$:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x \left\{ a(x, t-1)|x+1, 0\rangle + a(x, t-1)|x-1, 1\rangle + \right. \\ \left. b(x, t-1)|x+1, 0\rangle - b(x, t-1)|x-1, 1\rangle \right\} \quad (3.33)$$

Die Rekursionsrelationen für die Amplituden a, b ergeben sich durch Projektion auf die einzelnen Basiszustände:

$$a(x, t) = \langle x, 0|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a(x-1, t-1) + b(x-1, t-1) \right\} \quad (3.34)$$

$$b(x, t) = \langle x, 1|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a(x+1, t-1) - b(x+1, t-1) \right\} \quad (3.35)$$

3.2 Erweiterung des Coinraumes

Eine mögliche Erweiterung des obigen Modells besteht aus der Ergänzung des Coinraumes um mehrere Qubits. Der Gesamthilbertraum ist Produktraum aus Ortsraum und M Coinräumen, $H = H_P \otimes (H_C)^{\otimes M}$. Ein allgemeiner Entwicklungsoperator \hat{E} würde wie folgt ausschauen:

$$\hat{E} = \left(\hat{S}^{+1} \otimes \mathbb{1}_C^{\otimes (M-1)} \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{S}^{-1} \otimes \mathbb{1}_C^{\otimes (M-1)} \otimes |1\rangle\langle 1| \right) \left(\mathbb{1}_P \otimes \mathbb{1}_C^{\otimes (M-1)} \otimes \hat{C} \right) \quad (3.36)$$

Die Entwicklung des Quantum Walks ist aber immer noch abhängig von einem Coin alleine, d.h. nur ein einzelner Coin steuert die Bewegung auf dem Gitter.

Modelle mit dieser Erweiterung wurden in Arbeiten von Brun et al. [25] und Flitney et al. [47] studiert. Erstere beschäftigte sich mit dem Übergang in den klassischen Bereich. Durch Einsatz verschiedener Coinoperatoren können Interferenzeffekte reduziert werden. In der Arbeit von Flitney et al. wurde die Umsetzung von Parrondo Spielen [57, 58, 85] in Quantum Walk Modellen diskutiert. Der Parrondo Effekt ist dadurch charakterisiert, daß aus der Kombination zweier Spiele mit negativem Erwartungswert, ein Spiel mit positivem Erwartungswert gemacht werden kann. Durch die Erweiterung des Coinraumes

ist es möglich, eine Geschichtsabhängigkeit innerhalb des QW zu studieren. Innerhalb des M -fachen Coinraumes werden die Ergebnisse der $t - 1$ vorherigen Coinwürfe gespeichert. Der neue Coinwurf wird dann abhängig von diesen vorherigen Ergebnissen ausgeführt. Im folgenden wird dieses Modell eingehender betrachtet, da einige interessante Effekte und neue Methoden auftreten. Zu den bisherigen Operationen, Coinwurf und Gitterbewegung, im Operator \hat{E} implementiert, kommt ein Ordnungsoperator \hat{O} , der im Coinraum die bisherigen Ergebnisse speichert bzw. ordnet. Die Zeitentwicklung des Startzustandes besteht aus t -maliger Anwendung der Kombination \hat{E} und \hat{O} :

$$|\psi(t)\rangle = (\hat{O}\hat{E})^t |\psi(t_0)\rangle \quad (3.37)$$

Der Coinanteil des Entwicklungsoperators \hat{E} :

$$\begin{aligned} \hat{E} = & \left(\hat{S}^{+1} \otimes \mathbb{1}_C^{\otimes(M-1)} \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{S}^{-1} \otimes \mathbb{1}_C^{\otimes(M-1)} \otimes |1\rangle\langle 1| \right) \\ & \left(\mathbb{1}_P \otimes \sum_{j_1, \dots, j_{M-1} \in \{0,1\}} P_{j_1, \dots, j_{M-1}}^* \otimes \hat{U}(\rho_{j_1 \dots j_{M-1}}) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

ist speziell konstruiert. Die Projektionsoperatoren $P_{j_1, \dots, j_{M-1}}^*$ steuern die Anwendung des parameterabhängigen Würfeloperators $\hat{U}(\rho_{j_1 \dots j_{M-1}})$. Dadurch wird die Würfeloperation durch \hat{U} , abhängig von den anderen Coins ausgeführt. Durch den Parameter ρ ist eine Vorzugsrichtung links oder rechts einstellbar. Dieser parameterabhängige Operator sieht wie folgt aus:

$$\hat{U}(\rho) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & i\sqrt{1-\rho} \\ i\sqrt{1-\rho} & \sqrt{\rho} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Für die Geschichtsabhängigkeit ist der Operator \hat{O} zuständig:

$$\hat{O} = \mathbb{1}_P \otimes \sum_{j_1, \dots, j_M \in \{0,1\}} |j_M j_1 \dots j_{M-1}\rangle \langle j_1 \dots j_{M-1} j_M|. \quad (3.40)$$

Dieser ordnet die Coinstruktur um. Zur Veranschaulichung des gesamten Schemas, hier die explizite Darstellung der Operatoren für drei Coins ($M = 3$):

$$\begin{aligned} \hat{E} = & \left(\hat{S}^{+1} \otimes \mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{S}^{-1} \otimes \mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C \otimes |1\rangle\langle 1| \right) \\ & \left(\mathbb{1}_P \otimes \left(|00\rangle\langle 00| \otimes U(\rho_{00}) + |01\rangle\langle 01| \otimes U(\rho_{01}) + \right. \right. \\ & \left. \left. |10\rangle\langle 10| \otimes U(\rho_{10}) + |11\rangle\langle 11| \otimes U(\rho_{11}) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \hat{O} = & \mathbb{1}_P \otimes \left(|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 110| + \right. \\ & \left. |100\rangle\langle 001| + |101\rangle\langle 011| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111| \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

In Abb. 3.4 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen $M = 2$ und einen $M = 3$ geschichtsabhängigen Quantum Walk dargestellt. Im Gegensatz zum Eincoin Hadamard-walk treten, abhängig von der Anzahl der verwendeten Coins, zusätzliche Spitzen in der

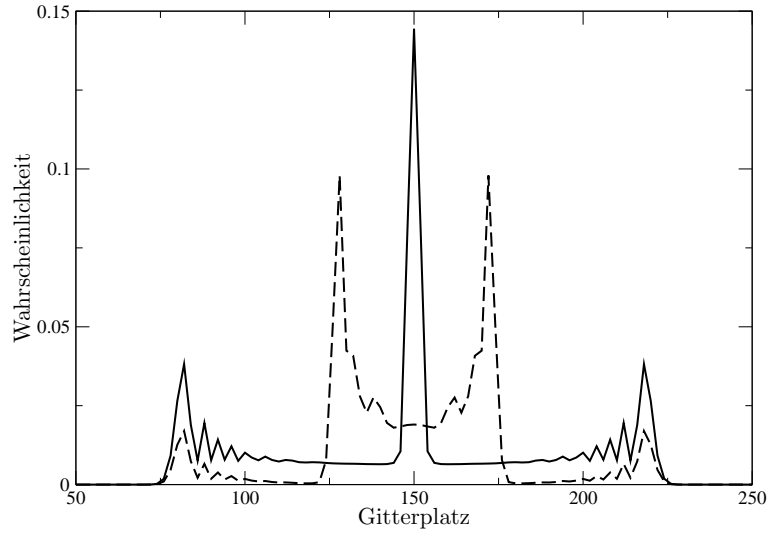


Abbildung 3.4: Wahrscheinlichkeitsverteilung eines QW mit Geschichtsabhängigkeit für unterschiedliche Coinanzahl, $M = 2$ (durchgezogen) und $M = 3$ (gestrichelt).

Verteilung auf. Diese können mit einem leichten Argument erklärt werden. Die Peaks sind Interferenz Phänomene, die sich aus Zuständen ergeben, die nach mehreren Zeitschritten auf sich selbst abgebildet werden, z.B. für $M = 2$:

$$\left(|x, 01\rangle - |x, 10\rangle\right) \xrightarrow{t=2} \left(|x, 01\rangle - |x, 10\rangle\right) \quad (3.43)$$

Die Umsetzung eines Parrondo Spiels funktioniert nun wie folgt. Man benötigt dazu einen QW mit $M = 3$ und zwei verschiedene Spiele \hat{A}, \hat{B} , wobei \hat{A}, \hat{B} einer Kombination $\hat{O}\hat{C}$ mit spezieller Parameterwahl ρ entspricht. Für das Spiel \hat{A} wählt man:

$$\rho_{00} = \rho_{01} = \rho_{10} = \rho_{11} = 0.5. \quad (3.44)$$

Im Spiel \hat{B} führt man einen entsprechenden Bias ein, z.B.:

$$\rho_{00} = 0.55 \quad \rho_{01} = \rho_{10} = \rho_{11} = 0.5. \quad (3.45)$$

Beide Spiele, unabhängig voneinander ausgeführt, liefern einerseits einen Erwartungswert gleich 0, andererseits einen negativen Erwartungswert. Führt man nun die Operatoren nacheinander aus, d.h.

$$|\psi(t+1)\rangle = \hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{A}|\psi(t)\rangle, \quad (3.46)$$

so ergibt sich ein positiver Erwartungswert, ein Quanten Parrondo Effekt.

Wie man sieht bietet das Modell des QW mit Geschichtsabhängigkeit mehrere interessante Phänomene. Durch Kombination spezieller Operatoren ist es möglich, den Erwartungswert zu lokalisieren. Der Einfluß der nicht benutzten Coins im Coinraum spielt hier die entscheidende Rolle. Ebenso besteht die Möglichkeit, Quantenspiele innerhalb eines Quantum Walks umzusetzen.

3.3 Mehrdimensionale QW Modelle

Dieser Abschnitt zeigt, wie man Quantum Walk Modelle auf mehrere räumliche Dimensionen erweitern kann. Dem eindimensionalen Modell ähnlich, werden Rekursionsrelationen für eine Computerumsetzung abgeleitet. Die analytische Berechnung der Mittelwerte und höheren Momente wird durch eine Erweiterung der Gleichung nach Brun et al. [25] ermöglicht. Zusätzlich zu den 1D Mittelwerten bzw. Varianzen können Ortskorrelationen betrachtet werden, mit denen im Laufe der Arbeit die Verschränkungsstruktur des Coin Startzustandes exakt beschrieben wird.

Die erste Diskussion höherdimensionaler QW Modelle ist in den Arbeiten von Mackay et al. [81] und später Tregenna et al. [110] nachzulesen.

3.3.1 2D

Die Erweiterung des 1D Quantum Walks auf mehrere räumliche Dimensionen stellt keine Hürde dar, weder numerisch noch algebraisch. Man definiert einen entsprechenden Würfeloperator und legt fest in welche Richtung der Walker bewegt wird. Dies soll am Beispiel des QW auf einem zweidimensionalen Gitter detailliert nachvollzogen werden.

Der Hilbertraum des Gesamtsystems ist durch folgenden Produktraum gegeben:

$$H = H_{P_x} \otimes H_{P_y} \otimes H_{C_x} \otimes H_{C_y}. \quad (3.47)$$

Die Basisvektoren sind Produktzustände der zwei Ortsräume und der zwei Coinräume. Die beiden Richtungen des Gitters werden mit x und y bezeichnet. Als Basis im Coinraum nimmt man die binäre Basis mit den Zuständen $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, z.B.:

$$|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle := |x, y, 00\rangle. \quad (3.48)$$

Der einfachste Coinoperator ist das Produkt zweier Hadamard Operatoren $\hat{H} = \hat{H}_1 \otimes \hat{H}_2$, mit folgender Wirkung auf die Basiszustände:

$$\hat{H}|x, y, 00\rangle = \frac{1}{2} (|x, y, 00\rangle + |x, y, 01\rangle + |x, y, 10\rangle + |x, y, 11\rangle) \quad (3.49)$$

$$\hat{H}|x, y, 01\rangle = \frac{1}{2} (|x, y, 00\rangle - |x, y, 01\rangle + |x, y, 10\rangle - |x, y, 11\rangle) \quad (3.50)$$

$$\hat{H}|x, y, 10\rangle = \frac{1}{2} (|x, y, 00\rangle + |x, y, 01\rangle - |x, y, 10\rangle - |x, y, 11\rangle) \quad (3.51)$$

$$\hat{H}|x, y, 11\rangle = \frac{1}{2} (|x, y, 00\rangle - |x, y, 01\rangle - |x, y, 10\rangle + |x, y, 11\rangle). \quad (3.52)$$

Die Bewegung auf dem Gitter erfolgt mittels Shiftoperator \hat{S} :

$$\hat{S}|x, y, 00\rangle = |x+1, y+1, 00\rangle \quad \hat{S}|x, y, 01\rangle = |x+1, y-1, 01\rangle \quad (3.53)$$

$$\hat{S}|x, y, 10\rangle = |x-1, y+1, 10\rangle \quad \hat{S}|x, y, 11\rangle = |x-1, y-1, 11\rangle. \quad (3.54)$$

Der Entwicklungsoperator \hat{E} schreibt sich wie folgt:

$$\hat{E} = \left((S_x^{+1} \otimes |0_x\rangle\langle 0_x| + S_x^{-1} \otimes |1_x\rangle\langle 1_x|) (\mathbb{1}_x \otimes \hat{H}) \right) \otimes \quad (3.55)$$

$$\left((S_y^{+1} \otimes |0_y\rangle\langle 0_y| + S_y^{-1} \otimes |1_y\rangle\langle 1_y|) (\mathbb{1}_y \otimes \hat{H}) \right). \quad (3.56)$$

Wie man erkennt, sind die Bewegungen in x - bzw. y -Richtung voneinander unabhängig. Eine mögliche Korrelation beider Richtungen würde dann aus einer Korrelation des Startzustandes resultieren. Natürlich ist es möglich anstatt des Produktes zweier Hadamard

Operatoren andere Würfelooperatoren zu nutzen. Operatoren, die die räumlichen Freiheitsgrade verschränken sind der DFT Coinoperator und der Grover Coinoperator, resultierend aus den jeweiligen bekannten Quantenalgorithmen. Nimmt man die binäre Kodierung der Coinbasis (von der 0 aus beginnend), so kann man beide Operatoren wie folgt darstellen. Den DFT Operator

$$C_d^D |\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^d}} \sum_{\nu=0}^{2^d-1} e^{2\pi i \mu \nu / 2^d} |\nu\rangle \quad (3.57)$$

und den Grover Operator

$$C_d^G |\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^d}} \left(-2|\mu\rangle + \sum_{\nu=0}^{2^d-1} |\nu\rangle \right). \quad (3.58)$$

Für $d = 2$ ist die Matrixdarstellung anschaulicher:

$$C_2^D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \quad C_2^G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Der Einfluß beider Operatoren im Vergleich zum Hadamardprodukt ist in Abb. 3.5 für verschiedene Coin Startzustände graphisch dargestellt.¹ Diese sind aus [110] entnommen.

$$|\psi_{sym}\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle + i|1\rangle) \otimes (|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{2} (|00\rangle + i|01\rangle + i|10\rangle - |11\rangle) \quad (3.60)$$

$$|\psi_G\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \quad (3.61)$$

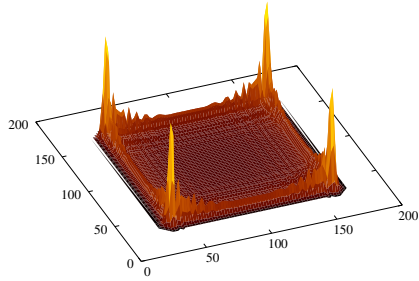
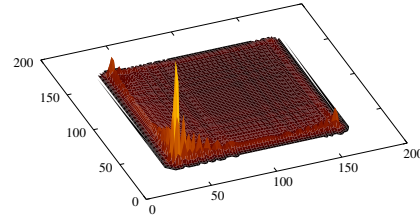
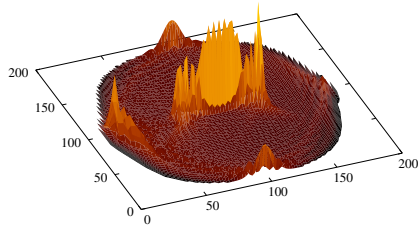
$$|\psi_D\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{2}}|01\rangle + |10\rangle - \frac{1-i}{\sqrt{2}}|11\rangle) \quad (3.62)$$

Es zeigt sich, daß unterschiedliche Startzustände im Coinraum nötig sind, um für den jeweiligen Operator symmetrische Verteilungen zu erhalten. Die Vierpeakstruktur des Hadamardoperators mit dem symmetrischen Coin Startzustand (3.60) in Abb. 3.5a entspricht der zweidimensionalen Erweiterung der eindimensionalen Verteilung mit der Zweipeakstruktur, vgl. Abb. 3.1. Hier kann man sehr gut die Produktstruktur des Hadamardoperators erkennen. Der DFT und der Grover Operator erzeugen ganz unterschiedliche Verteilungen. Auffällig ist beispielsweise die Lokalisierung des Walkers am Startpunkt durch den Grover Operator, vgl. Abb. 3.5e.

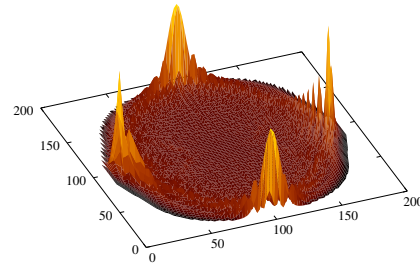
Im folgenden werden die Rekursionsrelationen abgeleitet. Der allgemeine Zustand zum Zeitpunkt t lautet:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{x,y} \left\{ \alpha(x,y,t) |x,y,00\rangle + \beta(x,y,t) |x,y,01\rangle + \gamma(x,y,t) |x,y,10\rangle + \delta(x,y,t) |x,y,11\rangle \right\}. \quad (3.63)$$

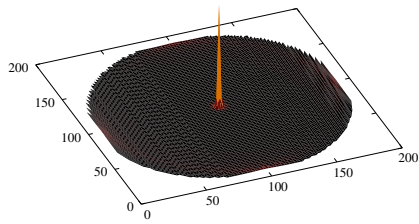
¹Die Angabe der Gittergröße g in den Abbildungen, ist in der gesamten Arbeit immer auf eine Dimension bezogen.

(a) $H \otimes H; (3.60)$ (b) $H \otimes H; (3.61)$ 

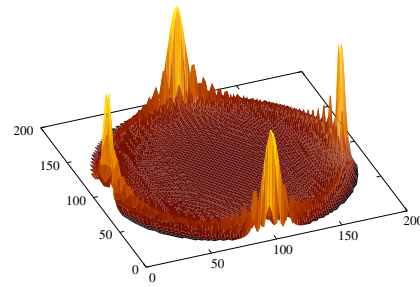
(c) DFT; (3.60)



(d) DFT; (3.62)



(e) Grover; (3.60)



(f) Grover; (3.61)

Abbildung 3.5: Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Gitter zweidimensionaler QW Modelle mit unterschiedlichen Coinoperatoren und Coin Startzuständen. Die Gittergröße einer Dimension beträgt $g = 200$, der Zeitpunkt der Messung $t = 90$. Die Bezeichnung beinhaltet den verwendeten Würfelooperator und den jeweiligen Coin Startzustand. Hellere Farben in der Farbkodierung bedeuten eine höhere Wahrscheinlichkeit.

Basis	x	y	$ 00\rangle$	$ 01\rangle$	$ 10\rangle$	$ 11\rangle$
$ 00\rangle$	+	+	+	+	+	+
$ 01\rangle$	+	-	+	-	+	-
$ 10\rangle$	-	+	+	+	-	-
$ 11\rangle$	-	-	+	-	-	+

Tabelle 3.1: Anwendung des Shiftoperators und des $\hat{H} \otimes \hat{H}$ Operators auf die vier verschiedenen 2-Qubit Basiszustände. Auswertung wie folgt, z.B. linke Spalte, erste Zeile: Ist der Coinzustand $|00\rangle$, so ist in x -Richtung und in y -Richtung jeweils +1 zu gehen. Der Hadamard-Produkt Operator macht aus $|00\rangle$ ein „plus $|00\rangle$ plus $|01\rangle$ plus $|10\rangle$ plus $|11\rangle$ “.

Nach Anwendung der oben definierten Hadamard- und Shiftoperatoren und der Projektion auf die Coinbasis Zustände erhält man:

$$\alpha(x, y, t) = \langle x, y, 00 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\alpha(x-1, y-1, t-1) + \beta(x-1, y-1, t-1) + \gamma(x-1, y-1, t-1) + \delta(x-1, y-1, t-1) \right) \quad (3.64)$$

$$\beta(x, y, t) = \langle x, y, 01 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\alpha(x-1, y+1, t-1) - \beta(x-1, y+1, t-1) + \gamma(x-1, y+1, t-1) - \delta(x-1, y+1, t-1) \right) \quad (3.65)$$

$$\gamma(x, y, t) = \langle x, y, 10 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\alpha(x+1, y-1, t-1) + \beta(x+1, y-1, t-1) - \gamma(x+1, y-1, t-1) - \delta(x+1, y-1, t-1) \right) \quad (3.66)$$

$$\delta(x, y, t) = \langle x, y, 11 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\alpha(x+1, y+1, t-1) - \beta(x+1, y+1, t-1) - \gamma(x+1, y+1, t-1) + \delta(x+1, y+1, t-1) \right) \quad (3.67)$$

Diese Schritte können mit Hilfe einer Tabelle leicht zusammengefaßt und übersichtlich dargestellt werden (siehe Tabelle 3.1). Die tabellarische Form erleichtert die Herangehensweise an höherdimensionale Modelle. Die Umsetzung in einem geeignetem Simulationsprogramm ergibt sich direkt aus der Tabelle.

Die Wahrscheinlichkeit, den Walker am Ort (x, y) zum Zeitpunkt t zu finden, ergibt sich zu:

$$P(x, y, t) = |\alpha(x, y, t)|^2 + |\beta(x, y, t)|^2 + |\gamma(x, y, t)|^2 + |\delta(x, y, t)|^2. \quad (3.68)$$

Für die Charakterisierung solch einer zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung existieren mehrere Möglichkeiten, vgl. z.B. [97]. Die Mittelwerte in x - bzw. y - Richtung ergeben sich durch Aufsummation der jeweils anderen Richtung:

$$\mu_x(t) \equiv \langle x \rangle_t = \sum_x x \sum_y P(x, y, t) \quad \mu_y(t) \equiv \langle y \rangle_t = \sum_y y \sum_x P(x, y, t), \quad (3.69)$$

wobei man abkürzende Schreibweisen definieren kann:

$$P(x, t) = \sum_y P(x, y, t) \quad P(y, t) = \sum_x P(x, y, t). \quad (3.70)$$

Die Berechnung der Varianzen erfolgt wie im eindimensionalen Fall:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad \sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2, \quad (3.71)$$

wobei die Standardabweichungen σ_x bzw. σ_y die Wurzeln aus der Varianz sind. Bei einer zweidimensionalen Zufallsgröße läßt sich zusätzlich die mögliche Korrelation der beiden Verteilungen in x - bzw. y -Richtung untersuchen. Sie wird üblicherweise durch die Kovarianz quantifiziert, welche definiert ist als:

$$\text{Cov}(x, y) = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle = \langle xy \rangle - \mu_x \mu_y. \quad (3.72)$$

Bei unkorrelierten Größen wären $\langle xy \rangle$ und $\langle x \rangle \langle y \rangle$ gleich. Der Korrelationskoeffizient entspricht der Normierung auf ein Intervall zwischen -1 und $+1$:

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (3.73)$$

Bei $\rho_{xy} = 1$ wären x und y perfekt korreliert, bei $\rho_{xy} = -1$ antikorreliert.

Um die Mittelwerte analytisch zu bestimmen, kann die bereits oben diskutierte Ableitung nach Brun et al. [25] auf mehrere Dimensionen erweitert werden. Die Wahrscheinlichkeit den Walker am Ort (x, y) zum Zeitpunkt t zu finden, ergibt sich nach einfacher Rechnung zu:

$$P(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{k_x, k'_x, k_y, k'_y = -\pi}^{\pi} dk_x dk'_x dk_y dk'_y e^{-iy(k_x - k'_x)} e^{-ix(k_y - k'_y)} \langle \phi_0 | (U_{k_x}^\dagger)^t U_{k'_x}^t \otimes (U_{k_y}^\dagger)^t U_{k'_y}^t | \phi_0 \rangle. \quad (3.74)$$

Ist man nur an den eindimensionalen Mittelwerten interessiert, so kann über die y -Richtung summiert werden, $\langle x \rangle = \sum_x x \sum_y P(x, y, t)$, und Beziehung (3.25) für $m = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_x x^m e^{-ix(k - k')} = i^m \delta^{(m)}(k - k') \quad (3.75)$$

angewandt werden. So erhält man für den Mittelwert in x -Richtung

$$\langle x \rangle = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{k_x, k_y = -\pi}^{\pi} dk_x dk_y \langle \phi_0 | (U_{k_x}^\dagger)^t \frac{d}{dk_x} U_{k_x}^t \otimes \underbrace{(U_{k_y}^\dagger)^t U_{k_y}^t}_{\mathbb{1}} | \phi_0 \rangle. \quad (3.76)$$

Eine äquivalente Rechnung liefert den Mittelwert in y -Richtung:

$$\langle y \rangle = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{k_x, k_y = -\pi}^{\pi} dk_x dk_y \langle \phi_0 | \underbrace{(U_{k_x}^\dagger)^t U_{k_x}^t}_{\mathbb{1}} \otimes (U_{k_y}^\dagger)^t \frac{d}{dk_y} U_{k_y}^t | \phi_0 \rangle. \quad (3.77)$$

Der Mittelwert in eine Richtung des zweidimensionalen Modells, bei Aufsummation der jeweils anderen Richtung, entspricht also dem eindimensionalen Modell mit zwei Coins.

Für die Berechnung des Erwartungswertes beider Richtungen $\langle xy \rangle$ wird (3.25) zweimal angewandt:

$$\langle xy \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_x, k_y=-\pi}^{\pi} dk_x dk_y \langle \phi_0 | (U_{k_x}^\dagger)^t \frac{d}{dk_x} U_{k_x}^t \otimes (U_{k_y}^\dagger)^t \frac{d}{dk_y} U_{k_y}^t | \phi_0 \rangle. \quad (3.78)$$

Die einfache Berechnung der Erwartungswerte über diese Methode ist nur möglich, da die Würfeloperatoren in beide Richtungen unabhängig voneinander sind. Die Anwendung des Grover bzw. DFT Operators beispielsweise, würde eine komplexere Auswertung nötig machen.

3.3.2 3D und 4D

Die Erweiterung auf drei bzw. vier Raumdimensionen macht keine großen Unterschiede zum zweidimensionalen Fall. Die Basis im Coinraum wird um die nötigen Qubits erweitert. Man nimmt die Computational Basis und nummeriert die Zustände binär durch. Im dreidimensionalen Fall ergeben sich 2^3 Basiszustände, nummeriert von 1 bis 8:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = |000\rangle =: |1\rangle \quad |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = |100\rangle =: |5\rangle \quad (3.79)$$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle = |001\rangle =: |2\rangle \quad |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle = |101\rangle =: |6\rangle \quad (3.80)$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = |010\rangle =: |3\rangle \quad |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = |110\rangle =: |7\rangle \quad (3.81)$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle = |011\rangle =: |4\rangle \quad |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle = |111\rangle =: |8\rangle. \quad (3.82)$$

Im vierdimensionalen Fall entsprechend 2^4 Zustände, die mit 1 bis 16 bezeichnet werden:

$$|0000\rangle := |1\rangle, |0001\rangle := |2\rangle, \dots, |1111\rangle := |16\rangle. \quad (3.83)$$

Die Qubits werden den einzelnen Raumrichtungen x_i zugeordnet, wobei Qubit 1 der Richtung x_1 entspricht, usw. Die allgemeinen QW Zustände in 3D bzw. 4D zum Zeitpunkt t sehen wie folgt aus:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{x_1, x_2, x_3} \sum_{j=1}^8 \alpha_j(x_1, x_2, x_3, t) |x_1, x_2, x_3, j\rangle \quad (3.84)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4} \sum_{j=1}^{16} \alpha_j(x_1, x_2, x_3, x_4, t) |x_1, x_2, x_3, x_4, j\rangle, \quad (3.85)$$

wobei $|x_1, x_2, x_3, j\rangle := |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \otimes |j\rangle$ ist. Als Würfeloperator wird das Produkt von drei bzw. vier Hadamardoperatoren angenommen. Die Anwendung der Würfel- (\hat{H}) und Shiftoperatoren (\hat{S}) kann wie im zweidimensionalen Fall in Tabellenform dargestellt werden. Passende Simulationsalgorithmen lassen sich direkt aus der Tabelle ablesen. Der dreidimensionale QW ist in Tabelle 3.2, der vierdimensionale QW in Tabelle 3.3 aufgeschlüsselt.

Da ein Produktwürfeloperator verwendet wird, kann der Entwicklungsoperator \hat{E} als Produkt der eindimensionalen Operatoren geschrieben werden:

$$\hat{E} = \left((\hat{S}_{x_i}^{+1} \otimes |0_{x_i}\rangle\langle 0_{x_i}| + \hat{S}_{x_i}^{-1} \otimes |1_{x_i}\rangle\langle 1_{x_i}|) (\mathbb{1}_{x_i} \otimes \hat{H}) \right)^{\otimes i}. \quad (3.86)$$

Die Korrelationen der einzelnen Raumrichtungen sind also nur durch den Coin Startzustand bedingt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen berechnen sich durch Summation der

Basis	x_1	x_2	x_3	$ 000\rangle$	$ 001\rangle$	$ 010\rangle$	$ 011\rangle$	$ 100\rangle$	$ 101\rangle$	$ 110\rangle$	$ 111\rangle$
$ 1\rangle := 000\rangle$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$ 2\rangle := 001\rangle$	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
$ 3\rangle := 010\rangle$	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-
$ 4\rangle := 011\rangle$	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+
$ 5\rangle := 100\rangle$	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$ 6\rangle := 101\rangle$	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+
$ 7\rangle := 110\rangle$	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+
$ 8\rangle := 111\rangle$	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-

Tabelle 3.2: Anwendung des Shiftoperators \hat{S} und des $\hat{H} \otimes \hat{H} \otimes \hat{H}$ Operators auf die 3-Qubit Basiszustände.

einzelnen Amplituden $|\alpha_j|^2$:

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^8 |\alpha_j(x_1, x_2, x_3, t)|^2 \quad (3.87)$$

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \sum_{j=1}^{16} |\alpha_j(x_1, x_2, x_3, x_4, t)|^2. \quad (3.88)$$

Die eindimensionalen bzw. mehrdimensionalen Mittelwerte ergeben sich durch Summation über die jeweils anderen Richtungen, wie hier beispielsweise gezeigt:

$$\langle x_1 \rangle_t = \sum_{x_1} x_1 \sum_{x_2, x_3} P(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3.89)$$

Ebenso wie im zweidimensionalen Fall, lassen sich die Korrelationen zwischen zwei Raumrichtungen anhand der Kovarianzen berechnen:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \quad (3.90)$$

mit $\text{Cov}(x_i, x_j) = \text{Cov}(x_j, x_i)$ und $\text{Cov}(x_i, x_i) = \sigma_{x_i}^2$. Die Korrelationskoeffizienten berechnen sich äquivalent. Aus diesen Paarkovarianzen läßt sich die Kovarianzmatrix $V_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$ aufstellen. Eine charakteristische Größe ist die Determinante:

$$\begin{aligned} \text{Det}(V_{ij}) = & \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2 - \text{Cov}(x, y)^2 \sigma_z^2 - \text{Cov}(x, z)^2 \sigma_y^2 - \text{Cov}(y, z)^2 \sigma_x^2 \\ & + 2 \text{Cov}(x, y) \text{Cov}(x, z) \text{Cov}(y, z). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Will man ähnlich zum 2D Fall höhere Korrelationen betrachten, so kann man beispielsweise folgende Größe untersuchen:

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle)(x_3 - \langle x_3 \rangle) \rangle = & \langle x_1 x_2 x_3 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle - \\ & \langle x_1 \rangle \text{Cov}(x_2, x_3) - \langle x_2 \rangle \text{Cov}(x_1, x_3) - \langle x_3 \rangle \text{Cov}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (3.92)$$

die aber der Struktur der Kovarianz nur bedingt ähnelt. Höhere Korrelationen werden in der dem Autor bekannten Literatur nicht diskutiert.

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	$ 1\rangle$	$ 2\rangle$	$ 3\rangle$	$ 4\rangle$	$ 5\rangle$	$ 6\rangle$	$ 7\rangle$	$ 8\rangle$	$ 9\rangle$	$ 10\rangle$	$ 11\rangle$	$ 12\rangle$	$ 13\rangle$	$ 14\rangle$	$ 15\rangle$	$ 16\rangle$
$ 1\rangle := 0000\rangle$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$ 2\rangle := 0001\rangle$	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
$ 3\rangle := 0010\rangle$	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-
$ 4\rangle := 0011\rangle$	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-
$ 5\rangle := 0100\rangle$	+	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+
$ 6\rangle := 0101\rangle$	+	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	+	+	+	+	-	-	-	+
$ 7\rangle := 0110\rangle$	+	-	-	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-
$ 8\rangle := 0111\rangle$	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-
$ 9\rangle := 1000\rangle$	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	+
$ 10\rangle := 1001\rangle$	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+
$ 11\rangle := 1010\rangle$	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-
$ 12\rangle := 1011\rangle$	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-
$ 13\rangle := 1100\rangle$	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
$ 14\rangle := 1101\rangle$	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
$ 15\rangle := 1110\rangle$	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+
$ 16\rangle := 1111\rangle$	-	-	-	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+

Tabelle 3.3: Anwendung des Shiftoperators \hat{S} und des $\hat{H}^{\otimes 4}$ Operators auf die 4-Qubit Basiszustände.

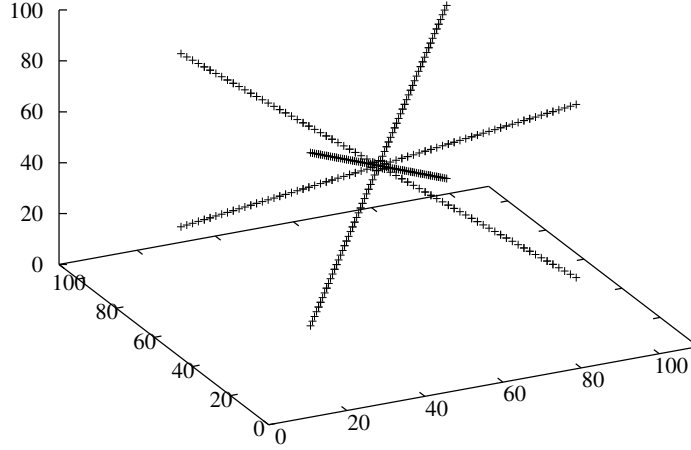


Abbildung 3.6: Zeitentwicklung eines dreidimensionalen QW mit symmetrischem Coin Startzustand $(|0\rangle + i|1\rangle)^{\otimes 3}$. Die Gittergröße einer Dimension beträgt $g = 110$. Die Anzahl der Zeitschritte ist $t = 50$. Dargestellt ist die zeitliche Entwicklung der acht größten Peaks der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Die analytische Berechnung der Mittelwerte bzw. höheren Momente erfolgt ebenfalls mit einer Erweiterung der Gleichung (3.27) nach Brun et al. [25]. Diese Auswertung ist möglich, da der Entwicklungsoperator \hat{E} in Produktform vorliegt. Die Berechnung der Erwartungswerte gleicht dem 2D Fall und wird in Kapitel 5 ausführlich erörtert.

Die Betrachtung der Zeitentwicklung im 3D Gitter wird möglich durch Betrachtung der Peakstruktur. Diese Methode ist inspiriert durch eine Arbeit von Navarrete et al. [89], der die zeitliche Entwicklung der Peaks im eindimensionalen QW mit Nichtlinearitäten untersucht hat. Man erkennt in Abb. 3.6 eindeutig die Äquivalenz zur Zweipeakstruktur im eindimensionalen Fall (vgl. Abb. 3.1), bzw. Vierpeakstruktur im zweidimensionalen Fall (vgl. Abb. 3.5a).

3.4 Nichtlineare 1D Modelle

Eine ganz andere Möglichkeit Quantum Walk Modelle zu erweitern, ergibt sich durch das Hinzufügen von Nichtlinearitäten. Ein erstes Modell war der Stroboskopische Quantum Walk von Buerchaper und Burnett [27]. Als Ortszustände werden die Eigenzustände bestimmter physikalischer Systeme genommen. Der einfachste Fall beschreibt den harmonischen Oszillator. Die QW Operationen wirken dann wie periodische Störungen des darunterliegenden Systems. Dadurch ist es möglich eine Verbindung zu nichtlinearen Systemen des Quantenchaos, wie dem δ -gekickten Rotator herzustellen. Eine Einführung in das Gebiet des Quantenchaos bietet das Buch von Haake [55]. Das Modell des Stroboskopischen QW im Harmonischen Oszillator wird nachstehend ausführlicher betrachtet, da sich eine erste Verbindung zu verschränkten Zuständen gezeigt hat. Es besteht ein Zusam-

menhang zwischen der Coin-Gitter Verschränkung und der Ortsverteilung.

Wie bereits erwähnt, sollen die Ortszustände nun Eigenzustände eines Hamiltonoperators sein. Der Hilbertraum H ist Produktraum, bestehend aus Ortsraum H_P und Coinraum H_C . Die Zeitentwicklung wird beschrieben durch einen Operator \hat{E} . Zusätzlich wird eine Zeitentwicklung des Systems eingefügt auf dem der Walk stattfindet. Die charakteristische Größe ist der Faktor τ , der die Zeit zwischen den einzelnen Schritten des Quantum Walks angibt. Die Zeitentwicklung erfolgt über die Schrödingergleichung, mit einem Zeitentwicklungsoperator $\exp(-i\hat{H}_P\tau/\hbar)$. Der gesamte Entwicklungsoperator für den Quantum Walk sieht nun wie folgt aus:

$$\hat{E}(\tau) = \hat{S}(\hat{C} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_P\tau}). \quad (3.93)$$

Der Shiftoperator \hat{S} und der Coinoperator \hat{C} sind äquivalent zum diskreten eindimensionalen Modell definiert. Durch den Operator $\hat{E}(\tau)$ erhält der Walker an jedem Gitterpunkt eine τ -abhängige Phase. Falls die Phasendifferenz zwischen Eigenzuständen benachbarter Gitterpunkte ganzzahlige Vielfache von 2π ist, ereignet sich eine vollständige Phasenneueinstellung. Das daraus resultierende kleinstmögliche Zeitintervall ist gegeben durch die Talbot-Zeit (siehe z.B. [18, 19]):

$$T = \frac{2\pi\hbar\lambda}{E_n - E_{n+2}}, \quad (3.94)$$

wobei λ eine spezifische systemabhängige Ganzzahl ist und die E_n Energieeigenwerte des zugehörigen Hamiltonians. Die Analyse kann also auf $\tau \in [0, T]$ beschränkt werden. Der einfachste Fall behandelt den Harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_P = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2}) \quad (3.95)$$

und der bekannten Wirkung auf die Eigenzustände bzw. hier die Ortszustände $|n\rangle$:

$$\hat{H}_P|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (3.96)$$

Die Talbotzeit des Harmonischen Oszillators ist $T = \frac{\pi}{\omega}$, mit $\lambda = 1$. Damit ergibt sich folgende Darstellung:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_P\tau} = e^{-i\pi(n+\frac{1}{2})\tau}, \quad (3.97)$$

wobei in Einheiten der Talbot-Zeit gerechnet wird, τ also dimensionslos ist, $\tau \in [0, 1]$. Um den Grundzustand nicht zu erreichen, wird der Walk lokalisiert in einem hochangeregtem Zustand gestartet. Das Ausbreitungsverhalten des Walks ist τ -abhängig. In Abb. 3.7 sind der Mittelwert und die Standardabweichung in Abhängigkeit des Parameters τ aufgetragen. Je nach Wahl von τ ergibt sich eine Ausbreitung vergleichbar mit dem diskreten QW, periodischen Oszillationen der Wahrscheinlichkeit, bis hin zur kompletten Lokalisierung des Zustandes am Ursprung. In den Abb. 3.8 ist die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für verschiedene τ dargestellt. Man kann klar die Periodizität erkennen, die sich in Abhängigkeit von τ ergibt.

Die Veranlassung zur weiteren Beschäftigung mit diesem Modell ergab sich aus der Betrachtung der Verschränkung zwischen Coin und Gitter in Abhängigkeit des τ Parameters. Ein Maß zur Betrachtung der Coin-Gitter Verschränkung ist die Verschränkungsentropie, vgl. (2.4):

$$E_C(t) = - \sum_j \lambda_j \log_2(\lambda_j), \quad (3.98)$$

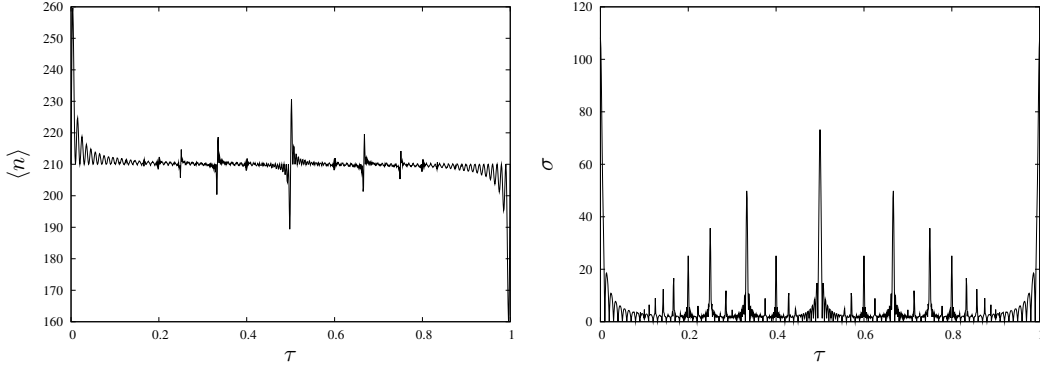


Abbildung 3.7: Mittelwert und Standardabweichung des Stroboskopischen Walks als Funktion von τ ($g = 420; t = 200$). Numerische Simulation mit $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ als Coin Startzustand.

die bereits von Carneiro et al. [28] im Zusammenhang mit QW Modellen verwendet wird. Die λ_j sind die Eigenwerte der reduzierten Dichtematrix des Coins zum Zeitpunkt t , wobei der Gitterfreiheitsgrad rausgespart wird. Trägt man die Zeitabhängigkeit der Verschränkung $E_C(t)$ für verschiedene τ Parameter auf und vergleicht mit der Zeitentwicklung der Standardabweichung des Ortes, wie in Abb. 3.9 dargestellt, so erkennt man einen direkten Zusammenhang. Wie es scheint, kann die Standardabweichung als Maß einer Coin-Gitter Verschränkung verwendet werden.

Um dieses Modell genauer zu analysieren, kann man mit dem Ansatz zur Fouriertransformation nach Nayak and Vishwanath [90] das Problem angehen. Über die Transformation in den k -Raum:

$$\tilde{\psi}(k, t) = \sum_n \psi(n, t) e^{ikn} \quad (3.99)$$

kann die Entwicklung der Wellenfunktion für einen Zeitschritt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t+1) &= \sum_n \left\{ M_+ \psi(n-1, t) e^{-i\pi\tau(n-1/2)} + M_- \psi(n+1, t) e^{-i\pi\tau(n+3/2)} \right\} e^{ikn} \\ &= \sum_n \left\{ M_+ \psi(n-1, t) e^{ikn-i\pi\tau n+i\pi\tau 1/2} + M_- \psi(n+1, t) e^{ikn-i\pi\tau n-i\pi\tau 3/2} \right\} \\ \Rightarrow \tilde{\psi}(k, t+1) &= e^{-i\frac{\pi}{2}\tau} \left(e^{ik} \sum_n \left\{ M_+ \psi(n-1, t) e^{i(k-\pi\tau)(n-1)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik} \sum_n \left\{ M_- \psi(n+1, t) e^{i(k-\pi\tau)(n+1)} \right\} \right), \quad (3.100) \end{aligned}$$

wobei

$$ikn - i\pi\tau n + i\pi\tau 1/2 = i(n-1)(k-\pi\tau) + ik - i\pi\tau 1/2 \quad (3.101)$$

$$ikn - i\pi\tau n - i\pi\tau 3/2 = i(n+1)(k-\pi\tau) - ik - i\pi\tau 1/2 \quad (3.102)$$

verwendet wurde. Daraus folgt der Zusammenhang zwischen den Zuständen zu den Zeitpunkten t und $t+1$:

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = e^{-i\frac{\pi}{2}\tau} \underbrace{\left(e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_- \right)}_{:=\hat{U}_k} \tilde{\psi}(k-\pi\tau, t). \quad (3.103)$$

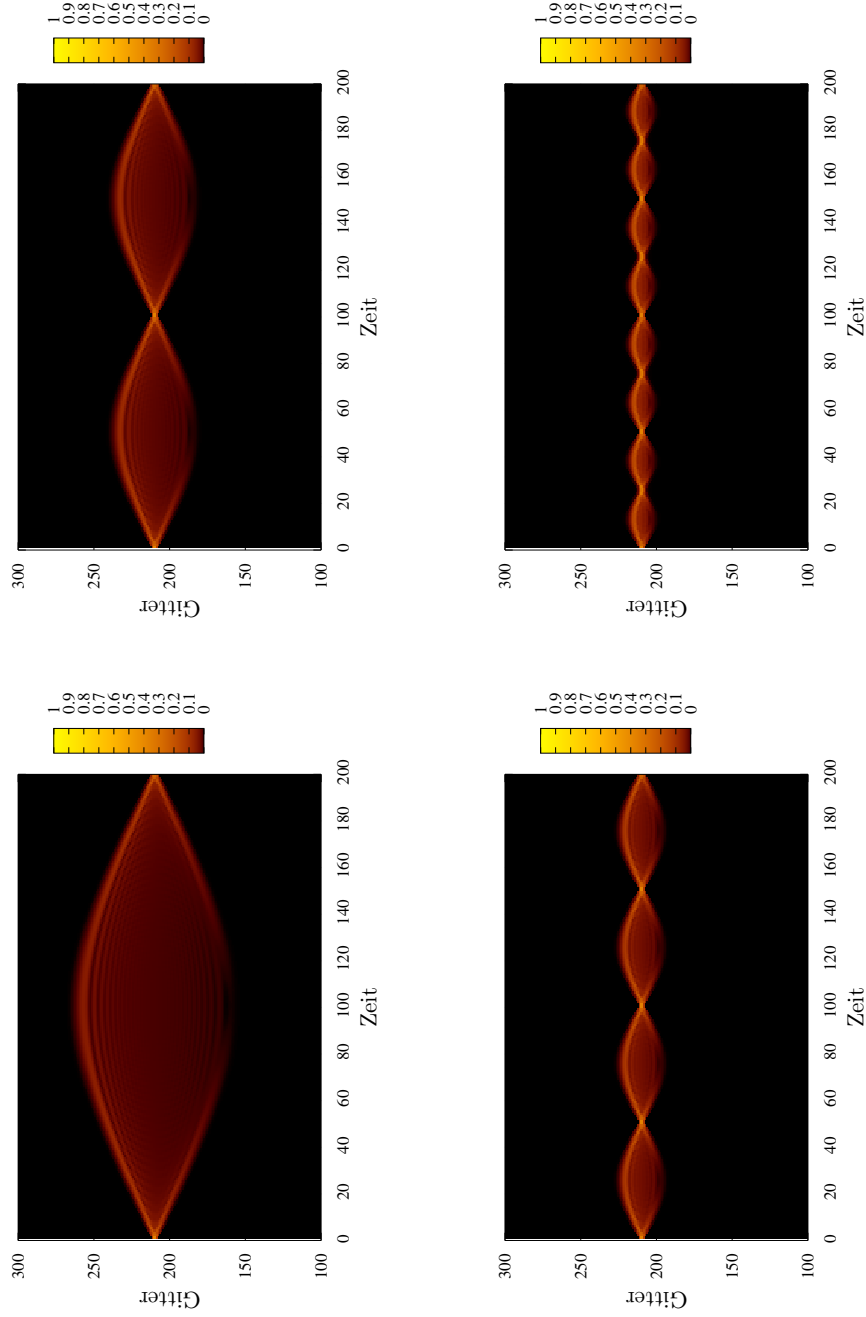
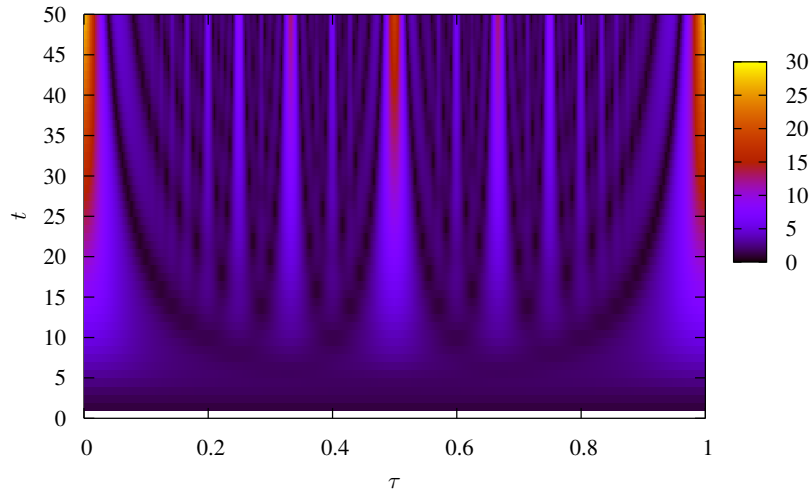
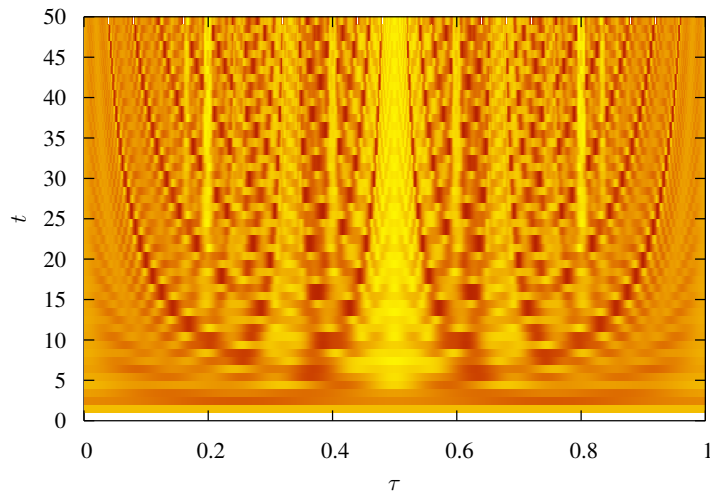


Abbildung 3.8: Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen eines Stroboskopischen QW für verschiedene τ . (Beginnend oben links nach unten rechts: $\tau = 0.01, 0.02, 0.04, 0.08$). Der Walk wurde mit $g = 420$ bis $t = 200$ für den Coin Startzustand $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ numerisch simuliert.



(a)



(b)

Abbildung 3.9: Zeitentwicklung der Standardabweichung (a) und der Verschränkungsentropie (b)(3.98) für den Stroboskopischen QW mit $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ als Coin Startzustand. Die Gittergröße ist $g = 120$. Die Auflösung für τ ist $1/100$.

Die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t + 1$ mit Wellenvektor k wird bestimmt durch den Zustand zum Zeitpunkt t mit Wellenvektor $k - \pi\tau$. Der Stroboskopische Walk bewirkt eine Phasendifferenz von $\pi\tau$ pro Zeitschritt. Um in den Ortsraum zurückzutransformieren wählt man die Coinbasisdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \psi_0(n, t+1) \\ \psi_1(n, t+1) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{U}_k \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_0(k - \pi\tau, t) \\ \tilde{\psi}_1(k - \pi\tau, t) \end{pmatrix} e^{-ikn} \quad (3.104)$$

mit dem Würfeloperator:

$$\hat{U}_k = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\tau}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ik} & e^{ik} \\ e^{-ik} & -e^{-ik} \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

$\psi_0(n, t+1)$ bzw. $\psi_1(n, t+1)$ bezeichnen die Komponenten, bezogen auf die Coinbasis $|0\rangle, |1\rangle$. Die gesamte Zeitentwicklung, vom Startpunkt t_0 bis zum Zeitpunkt t , kann man wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \psi_0(n, t) \\ \psi_1(n, t) \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \hat{U}_f \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_0(k - t\pi\tau, t_0) \\ \tilde{\psi}_1(k - t\pi\tau, t_0) \end{pmatrix} e^{-ikn} \quad (3.106)$$

wobei die Abkürzung

$$\hat{U}_f := U_k \Lambda U_k \Lambda^2 U_k \dots \Lambda^{t-1} U_k \quad (3.107)$$

mit

$$\Lambda := \begin{pmatrix} e^{-i\pi\tau} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\tau} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

verwendet wurde. Die weitere Auswertung dieser Reihe ist komplizierter. Eine Vertauschung der Λ - mit den \hat{U}_k -Matrizen ist für allgemeine τ nicht möglich, da folgende Kommutatorrelationen gelten:

$$[\Lambda^n, \hat{U}_k] = -2i \sin(n\pi\tau) \begin{pmatrix} 0 & e^{ik} \\ -e^{-ik} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

$$[\Lambda^n \hat{U}_k, \Lambda^m \hat{U}_k] = -i \sin(\pi\tau(m-n)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

Eine exakte Berechnung der Zustände ist nur bei bestimmten Annahmen für τ durchführbar, vgl. die Arbeit von Wójcik et al. [118].

Um die τ -Abhängigkeit der Mittelwerte zu berechnen, kann man die Auswertung etwas vereinfachen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich aus $P(n, t) = |\psi_0(n, t)|^2 + |\psi_1(n, t)|^2$, der Mittelwert aus $\langle n \rangle_t = \sum_n n P(n, t)$. Dazu schreibt man die Matrix \hat{U}_f in Komponenten $u_{ij} = u_{ij}(k, \tau, t)$:

$$\hat{U}_f = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.111)$$

Für den Startzustand im Coinraum wählt man $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$. Da der Startzustand im Ortsraum lokalisiert ist, im Fourierraum also gleichverteilt, braucht der Shift um $\pi\tau$ nicht

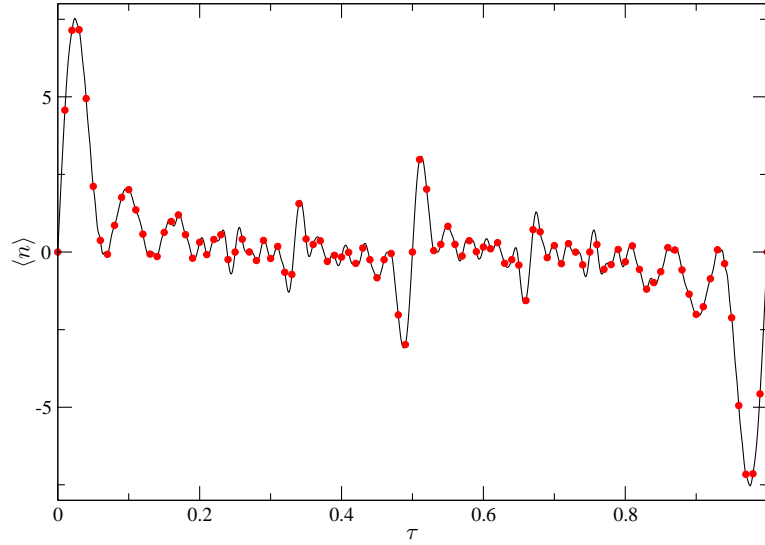


Abbildung 3.10: Mittelwert $\langle n \rangle$ als Funktion von τ eines eindimensionalen Stroboskopischen QW. Vergleich der numerischen Simulation (Linie) mit der analytischen Berechnung (Punkte) für $t = 30$ aus (3.117).

beachtet zu werden. Man erhält nun aus (3.106) für die einzelnen Komponenten des Coinvektors:

$$\psi_0(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{11} + iu_{12}) e^{-ikn} \quad (3.112)$$

$$\psi_1(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{11} + iu_{12}) e^{-ikn} \quad (3.113)$$

Interessiert ist man an den Wahrscheinlichkeitsamplituden:

$$\psi_0(n, t) \psi_0^*(n, t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \underbrace{(u_{11} + iu_{12})(u'_{11} + iu'_{12})^*}_{:=I_0(k, k', t)} e^{-in(k-k')} \quad (3.114)$$

$$\psi_1(n, t) \psi_1^*(n, t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \underbrace{(u_{21} + iu_{22})(u'_{21} + iu'_{22})^*}_{:=I_1(k, k', t)} e^{-in(k-k')} \quad (3.115)$$

wobei $u'_{ij} = u'_{ij}(k', \tau, t)$ nun Funktion von k' ist. Durch Anwendung der Relation (3.25) erhält man eine Gleichung für den Mittelwert:

$$\langle n \rangle_t = \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk dk' \left(I_0(k, k', t) + I_1(k, k', t) \right) \delta^{(1)}(k - k') \quad (3.116)$$

$$= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left. \partial_{k'} \left[I_0(k, k', t) + I_1(k, k', t) \right] \right|_{k'=k} \quad (3.117)$$

Dieses Integral läßt sich mit einem Computeralgebra Programm für Zeiten bis ungefähr $t = 30$ mit angemessenem Aufwand berechnen. In Abb. 3.10 wird die Auswertung des Integrals mit der numerischen Simulation verglichen. Man erhält perfekte Übereinstimmung.

Der Stroboskopische QW war der erste in einer Reihe von Modellen bzw. Arbeiten, die

den Einfluß von Nichtlinearitäten untersucht haben. Einen verallgemeinerten QW haben Wójcik et al. [118] betrachtet. Bei diesem wird bei Anwendung des Shiftoperators \hat{S} eine allgemeine ortsabhängige Phase $\phi(n)$ durch den Walker mitgenommen:

$$\hat{S}^{\pm 1}|n\rangle = e^{i\phi(n)}|n \pm 1\rangle \quad (3.118)$$

Den Zusammenhang mit dem Stroboskopischen QW erhält man durch:

$$\phi(n) = \langle n|H|n\rangle t_p, \quad (3.119)$$

wobei H ein Hamiltonoperator und t_p die Störungsperiode ist. Die Verbindung zum Standard QW ergibt sich durch eine konstante Phase. Wójcik et al. diskutieren nun den QW für den Fall $\phi(n) = n\phi$, wobei ϕ ein Rationalbruch von $\phi = 2\pi q/p$, mit q und p coprime, ist. Je nach Wahl von p ergeben sich unterschiedliche Arten ballistischer Diffusion. Für irrationale $\phi/(2\pi)$ erhalten sie eine dynamische Lokalisation des Walkers.

Die Arbeit von Bañuls et al. [10] untersucht einen zeitabhängigen Coinoperator $\hat{C}(t)$. Für einen betrachteten Spezialfall ist dieser mit dem verallgemeinerten QW von Wójcik et al. äquivalent. Sie erhalten ebenfalls, einerseits quasiperiodische Dynamik, andererseits dynamische Lokalisierung. In der Arbeit von Navarrete et al. [89] wird ein allgemeiner nichtlinearer QW untersucht. Für eine spezielle Wahl der Nichtlinearität wird das Verhalten der Peakstruktur der Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben. Dieses ist mit dem Verhalten von Solitonen vergleichbar. Die Arbeit von Košík et al. [74] diskutiert stochastische Phasenshifts innerhalb eines QW Modells. Dadurch ist es Košík et al. möglich Dekohärenz und den Quanten - Klassischen Übergang zu studieren.

3.5 Diskussion

Innerhalb dieses Kapitels wurden verschiedene Arten diskreter QW Modelle betrachtet und genauer analysiert. Durch Erweiterung des Coinraumes bzw. des Ortsraumes einerseits und durch Nichtlinearitäten andererseits, ist es möglich, das Ausbreitungsverhalten des Quantum Walks gezielt zu steuern. Dies stellt einen Ansatzpunkt für weitere Analysen bezüglich einer Anwendung innerhalb der Quanteninformationstheorie dar. Es wurden Wege aufgezeigt, die Modelle sowohl numerisch als auch in bestimmten Fällen analytisch auszuwerten. Wie man gesehen hat, besteht ein Zusammenhang zwischen charakteristischen Größen der Walkausbreitung und einer Coin-Gitter Verschränkung. In den beiden folgenden Kapiteln wird nun der Einfluß der Verschränkung des Coin Startzustandes auf die Gitterausbreitung genauer untersucht. Dabei wird der Zusammenhang zwischen Verschränkung einerseits und Ortskorrelationen andererseits exakt analysiert.

Kapitel 4

Verschränkung in 1D QW Modellen

In diesem Kapitel wird das Modell eines eindimensionalen QW mit multiplen Coins studiert. Diese Modelle sind aus der Literatur bekannt [25,47], neu ist jedoch die Untersuchung des Verschränkungseinflusses. Es wird gezeigt, daß für bestimmte Coin Startzustände der resultierende Ortsmittelwert proportional zur Verschränkung des Coin Startzustandes ist, wobei die Verschränkung mit der I-Concurrence gemessen wird. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit innerhalb eines QW Schemas eine Verschränkungsmessung durchzuführen.

4.1 Modellbeschreibung

Das hier diskutierte QW Schema mit M Coins, ist dem Modell von Brun et al. [25] in seiner Basis ähnlich. Im direkten Vergleich der beiden Modelle gibt es zwei Unterschiede. Auf der einen Seite einen unterschiedlichen Würfeloperator und andererseits wird der Entwicklungsoperator nacheinander auf alle Qubits angewandt. Man kann zeigen, daß es vor allem mit letzterer Erweiterung möglich ist, ein Schema zu entwickeln um die Verschränkung des Coin Startzustandes zu messen.

Der Hilbertraum besteht aus einem $(M \times 2)$ -dimensionalem Coinraum $H_C^{\otimes M}$, welcher die M Zweilevel Coins beschreibt und einem g -dimensionalen Ortsraum H_P der das eindimensionale Gitter mit g Gitterplätzen beschreibt. Das QW Schema besteht aus t -maliger Anwendung des Entwicklungsoperators \hat{E} auf einen ortslokalisierten Startzustand $|\Psi(t_0)\rangle$, wie in Kapitel 3 beschrieben. Der Entwicklungsoperator führt nun einen eindimensionalen QW aus, der nur von einem vorher festgelegtem Qubit gesteuert wird. Beispielsweise ein Operator mit drei Coins. Die Entwicklung erfolgt bezüglich des ersten Qubits:

$$\hat{E}_1 = \left(\underbrace{|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C}_{\text{Qubit 1}} \otimes \hat{S}^{+1} + \underbrace{|1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C}_{\text{Qubit 1}} \otimes \hat{S}^{-1} \right) \left(\underbrace{\hat{U} \otimes \mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C}_{\text{Qubit 1}} \otimes \mathbb{1}_P \right) \quad (4.1)$$

bzw. bezüglich des zweiten Qubits:

$$\hat{E}_2 = \left(\underbrace{\mathbb{1}_C \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1}_C}_{\text{Qubit 2}} \otimes \hat{S}^{+1} + \underbrace{\mathbb{1}_C \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{1}_C}_{\text{Qubit 2}} \otimes \hat{S}^{-1} \right) \left(\underbrace{\mathbb{1}_C \otimes \hat{U} \otimes \mathbb{1}_C}_{\text{Qubit 2}} \otimes \mathbb{1}_P \right) \quad (4.2)$$

und bezüglich des dritten Qubits:

$$\hat{E}_3 = \left(\underbrace{\mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C \otimes |0\rangle\langle 0|}_{\text{Qubit 3}} \otimes \hat{S}^{+1} + \underbrace{\mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C \otimes |1\rangle\langle 1|}_{\text{Qubit 3}} \otimes \hat{S}^{-1} \right) \left(\underbrace{\mathbb{1}_C \otimes \mathbb{1}_C \otimes \hat{U}}_{\text{Qubit 3}} \otimes \mathbb{1}_P \right). \quad (4.3)$$

Der hier verwendete Würfeloperator entspricht (3.39) mit $\rho = 1/2$:

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Die Shiftoperatoren $\hat{S}^{+1}, \hat{S}^{-1}$ wurden bereits in (3.7) bzw. (3.9) diskutiert. Die $\mathbb{1}_{P,C}$ sind Einheitsoperatoren im Orts- bzw. Coinraum. Durch einführen weiterer $\mathbb{1}_C$ Operatoren ist es möglich, das Schema beliebig zu erweitern.

4.2 Analytische Vereinfachung

Um die Ergebnisse auf analytischem Wege nachzuvollziehen, werden die bereits vorgestellten Methoden von Nayak und Vishwanath [90] bzw. Brun et al. [25] verwendet. Eine Fourieranalyse ermöglicht es, die Zeitentwicklung des Mittelwertes bzw. der Varianz soweit zu bestimmen, daß die Zusammenhänge mit der bereits angesprochenen I-Concurrence sichtbar werden.

Nach Ausführen der diskreten Fouriertransformation erhält man den U -Operator im k -Raum:

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ik} & ie^{ik} \\ ie^{-ik} & e^{-ik} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Zeitentwicklung kann dann einfach durch eine Eigenwertzerlegung des U_k -Operators berechnet werden. Die Bestimmung der Eigenwerte liefert:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos k \pm i\sqrt{1 + \sin^2 k}). \quad (4.6)$$

Durch ausführen einer Ähnlichkeitstransformation mit:

$$T = \begin{pmatrix} c_+ & c_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

und $c_{\pm} = e^{ik}(\sin k \pm \sqrt{1 + \sin^2 k})$ kann man leicht das t -malige Matrixprodukt des U_k -Operators ausdrücken:

$$U_k^t = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^t T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

mit den verwendeten Abkürzungen:

$$a = \cos t\theta + i \frac{\sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \sin t\theta \quad b = \frac{ie^{ik}}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \sin t\theta \quad (4.9)$$

$$\theta = \arccos \frac{\cos k}{\sqrt{2}} \quad (4.10)$$

und der Normierung $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Um die Verteilungsmomente im Ortsraum zu berechnen verwendet man Gleichung (3.27) nach Brun et al. [25]:

$$\langle x^m \rangle = \frac{i^m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \langle \phi_0 | (U_k^\dagger)^t \left[\frac{d^m}{dk^m} U_k^t \right] | \phi_0 \rangle. \quad (4.11)$$

Zur Berechnung des Mittelwertes ($m = 1$) fängt man mit der Vereinfachung des Integranden an:

$$(U_k^\dagger)^t \frac{d}{dk} U_k^t = \begin{pmatrix} a'a^* + b(b^*)' & a^*b' - (a^*)'b \\ a'b^* - a(b^*)' & a(a^*)' + b'b^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ -d_1^* & c_1^* \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Durch eine einfache Rechnung kann gezeigt werden, daß die Summe aus c_1 und c_1^* gleich Null ist:

$$c_1 + c_1^* = a^*a' + bb'^* + a'^*a + b'b^* = (aa^*)' + (bb^*)' = (|a|^2 + |b|^2)' = 0. \quad (4.13)$$

Daraus folgt ebenfalls, daß das Integral über die Summe verschwindet:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk (c_1 + c_1^*) = 0. \quad (4.14)$$

Im folgenden wird die Abkürzung:

$$\tilde{c}_1 := \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk c_1 \quad (4.15)$$

verwendet. In Abb. 4.1a ist die numerische Auswertung von \tilde{c}_1 als Funktion der Zeit dargestellt. Die Punkte sind linear angepaßt, mit dem Ergebnis:

$$\tilde{c}_1(t) = 0.5116 - 0.2932 t. \quad (4.16)$$

Man kann mit Symmetrieüberlegungen ebenso zeigen, daß das Integral über die Differenz der Nebendiagonalelemente verschwindet, also $\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk (d_1 - d_1^*) = 0$ ist.

Für die Berechnung der Varianz und der Standardabweichung benötigt man das zweite Moment. Dafür wird der Integrand aus (3.27) für $m = 2$ vereinfacht:

$$(U_k^\dagger)^t \frac{d^2}{dk^2} U_k^t = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ (-b^*)'' & (a^*)'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''a^* + b(b^*)'' & a^*b'' - (a^*)''b \\ a''b^* - a(b^*)'' & a(a^*)'' + b''b^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ -d_2^* & c_2^* \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Durch numerische Auswertung kann man zeigen, daß die obige Matrix nach ausführen der Integration diagonal ist und die Diagonalelemente gleich sind, also $-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk (c_2 - c_2^*) = 0$ und

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk d_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk (-d_2^*) = 0. \quad (4.18)$$

Mit diesen beiden Informationen folgt, daß das zweite Moment unabhängig vom Anfangszustand ist, also nur vom Integral:

$$\tilde{c}_2 := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk c_2. \quad (4.19)$$

abhängt. Das ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Konno [70, 71]. In Abb. 4.1b ist das Integral \tilde{c}_2 numerisch ausgewertet und mit einer quadratischen Abhängigkeit gefittet, mit dem Ergebnis:

$$\tilde{c}_2(t) = 0.351249 t^2. \quad (4.20)$$

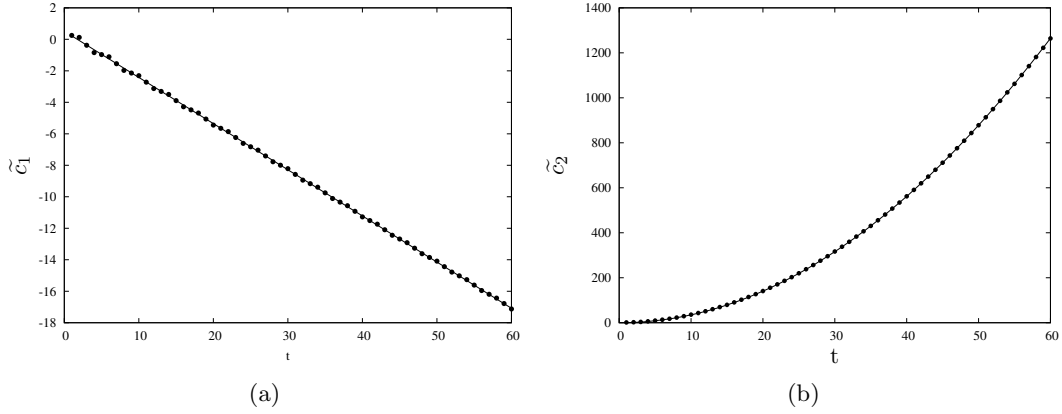


Abbildung 4.1: (a): Numerische Auswertung des Integrals \tilde{c}_1 als Funktion der Zeit (Punkte) und linearer Fit durch $\tilde{c}_1(t) = a_0 t + a_1$ mit $a_0 = -0.2932$ und $a_1 = 0.5116$ (Linie). (b): Numerische Auswertung des Integrals \tilde{c}_2 als Funktion der Zeit (Punkte) und quadratischer Fit mit $\tilde{c}_2(t) = b_0 t^2$ mit $b_0 = 0.351249$ (Linie).

Dieses QW Schema wird nun auf fünf unterschiedliche Coin Startzustände angewandt, die sich in der Verschränkungsstruktur unterscheiden. Es wird gezeigt, daß für Zustände mit einer gewissen Struktur folgende Gleichung für den quadratischen Mittelwert gilt:

$$\langle x \rangle_i^2 = \tilde{c}_1^2(t) (1 - IC_i^2), \quad (4.21)$$

wobei $\langle x \rangle_i$ der Mittelwert bezüglich des \hat{E}_i -Operators ist, der auf das i -te Qubit angewandt wird. IC_i ist die in (2.12) definierte I-Concurrence. Desweiteren kann folgende Gleichung für die Varianzen gezeigt werden:

$$(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)_i = (\tilde{c}_2(t) - \tilde{c}_1^2(t)) + \tilde{c}_1^2(t) IC_i^2 \quad (4.22)$$

Im folgenden Abschnitt werden analytische und numerische Beispiele dafür gezeigt, daß obige Gleichungen für Zustände gelten, die nur eine Art von Verschränkung aufweisen. Also 3-Qubit Zustände, entweder mit 2-Qubit Verschränkungen, (gemessen durch die Concurrence) oder einer 3-Qubit Verschränkung (gemessen durch das Tangle). Solche Zustände werden ab sofort als Zustände mit reiner Verschränkung bzw. Zustände mit gemischter Verschränkung bezeichnet.

4.3 Betrachtung der Beispielszustände

Die Zustände die anhand obigen Schemas besprochen werden sollen, sind bereits in Kapitel 2 ausführlich diskutiert worden (vgl. auch Anhang A). In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse bezüglich reiner/gemischter Verschränkung (Ver.) nochmals zusammengefaßt. Die Auswahl der Zustände erstreckt sich auf mehrere Verschränkungsklassen, hat somit einen allgemeinen Charakter.

Der 3-Qubit parameterabhängige GHZ-Zustand:

$$|\gamma \text{GHZ}\rangle = \gamma |000\rangle + \sqrt{1 - \gamma^2} |111\rangle \quad (4.23)$$

ist, wie bereits diskutiert, im Bereich $\gamma \in]0, 1[$ 3-Qubit verschränkt. Das Tangle ist ungleich Null, die Concurrences sind gleich Null. Die I-Concurrence ist gleich für alle reduzierten

Zustand	2-Qubit Ver.	3-Qubit Ver.	4-Qubit Ver.	Reine Ver.	$\langle x \rangle_i^2 \propto 1 - IC_i^2$
$ \gamma GHZ\rangle$	-	✓		✓	✓
$ \psi_6\rangle$	✓	-		✓	✓
$ \psi_{78}\rangle$	✓	✓		-	-
$ \phi_{14}\rangle$	✓	-	-	✓	✓
$ \phi_{15}\rangle$	✓	✓?	✓?	-	-

Tabelle 4.1: Verschränkungsstruktur der betrachteten Beispielszustände, wobei die 2-Qubit Verschränkung (Ver.) durch die Concurrence, die 3-Qubit Verschränkung von 3-Qubit Zuständen durch das Tangle und die 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung wie in Kapitel 2 beschrieben, gemessen wird. (vgl. die explizite Darstellung der Maße in Anhang A) Reine Verschränkung meint die Tatsache, daß der Zustand nur eine Art Verschränkung enthält.

Zustand	IC_1	IC_2	IC_3	IC_4
$ \gamma GHZ\rangle$	202.634	202.634	202.634	
$ \psi_6\rangle$	202.631	202.631	202.631	
$ \phi_{14}\rangle_1$	202.639	202.636	202.639	202.634
$ \phi_{14}\rangle_2$	202.641	202.635	202.641	202.633

Tabelle 4.2: Parameter A_0 aus dem Fit der quadrierten Mittelwerte, mit $\langle x \rangle_i^2 = A_0(1 - IC_i^2)$, für $t = 50$. $|\phi_{14}\rangle_1$ bzw. $|\phi_{14}\rangle_2$ bedeutet die Abhängigkeit von einem Parameter, bei konstantem anderen Parameter.

Qubits:

$$IC_{\{1,2,3\}}^2 = 4\gamma^2(1 - \gamma^2). \quad (4.24)$$

Die analytische Lösung für den Mittelwert berechnet sich zu:

$$\langle x \rangle_{\{1,2,3\}}^2 = \tilde{c}_1^2(2\gamma^2 - 1)^2 = \tilde{c}_1^2(1 - IC_{\{1,2,3\}}^2) \quad (4.25)$$

und stimmt mit der Vermutung (4.21) überein. In Tabelle 4.2 ist der Fitparameter A_0 gegeben, der aus der Anpassung an die Simulation mit $\langle x \rangle_i^2 = A_0(1 - IC_i^2)$ herrührt. Die analytische Rechnung liefert mit (4.16) für $t = 50$ einen Wert von 200.18. Wie man sieht stimmen Simulation und analytische Rechnung sehr gut überein.

Die folgende Zustände sind Eigenzustände zweier Heisenberg Spinketten, deren Verschränkung ausführlich in [43, 44], sowie in Kapitel 2 diskutiert wurden, vgl. ebenso Anhang A.

Der Zustand $|\psi_6\rangle$ ist ein rein 2-Qubit verschränkter Zustand

$$|\psi_6\rangle = \kappa_1|001\rangle + \kappa_2|010\rangle + \kappa_1|100\rangle \quad (4.26)$$

mit der Normierung $2\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$ und den verwendeten Abkürzungen $\kappa_1 = \frac{\sqrt{\chi}}{2\sqrt{\eta}}$ und $\kappa_2 = -\frac{2}{\sqrt{\chi}\sqrt{\eta}}$ mit $\eta = \sqrt{12 + \Delta(\Delta - 4)}$ und $\chi = \eta + \Delta - 2$. Die I-Concurrence kann als Funktion dieser Parameter berechnet werden:

$$IC_{\{1,3\}}^2 = 1 - \kappa_2^4 \quad IC_2^2 = 4(\kappa_2^2 - \kappa_2^4). \quad (4.27)$$

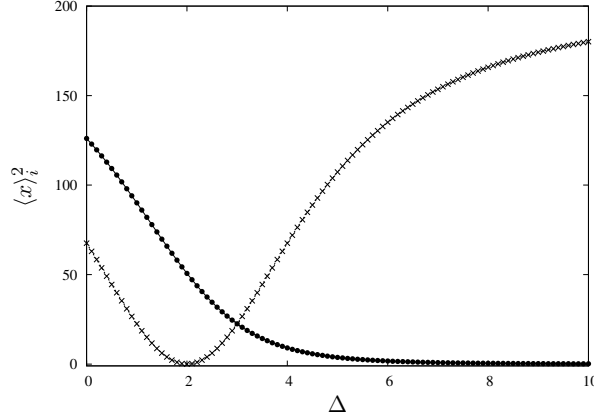


Abbildung 4.2: Quadratischer Mittelwert des Zustandes $|\psi_6\rangle$ in Abhängigkeit des Parameters Δ , mit dem Schema bezogen auf Qubit 1, Qubit 3 (Punkte) und Qubit 2 (Kreuze). Die Linien sind Anpassungen mit $\langle x \rangle_i^2 = A_0(1 - IC_i^2)$. Der QW wurde bis zum Zeitpunkt $t = 50$ simuliert.

Es kann wieder der Zusammenhang (4.21) gezeigt werden:

$$\langle x \rangle_{\{1,3\}}^2 = \tilde{c}_1^2 \kappa_2^4 = \tilde{c}_1^2 (1 - IC_{\{1,3\}}^2) \quad (4.28)$$

$$\langle x \rangle_2^2 = \tilde{c}_1^2 (1 - 2\kappa_2^2)^2 = \tilde{c}_1^2 (1 - IC_2^2). \quad (4.29)$$

In Abb. 4.2 ist die Parameterabhängigkeit des quadrierten Mittelwertes und das Ergebnis der Anpassung aufgetragen.

Der nächste Zustand, der diskutiert werden soll, ist:

$$|\psi_{78}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\zeta_1 |001\rangle + \zeta_2 |010\rangle + \zeta_1 |011\rangle + \zeta_1 |100\rangle + \zeta_2 |101\rangle + \zeta_1 |110\rangle \right) \quad (4.30)$$

mit

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}\sqrt{\chi}} \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{2}\sqrt{\eta}} \quad (4.31)$$

und χ und η wie oben definiert. Wie bereits erörtert, zeigt dieser Zustand sowohl 2-Qubit Verschränkungen als auch eine 3-Qubit Verschränkung. Die I-Concurrences für diesen Zustand sind in Anhang A angegeben, sind in diesem Fall aber nicht so wichtig, da der quadrierte Mittelwert keine Parameterabhängigkeit zeigt:

$$\langle x \rangle_{\{1,3\}} = (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_1^*) + 2\zeta_1 \zeta_2 (\tilde{d}_1 - \tilde{d}_1^*) = 0 \quad (4.32)$$

$$\langle x \rangle_2 = (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_1^*) + 2\zeta_1^2 (\tilde{d}_1 - \tilde{d}_1^*) = 0. \quad (4.33)$$

Die Berechnungen sind konsistent mit der numerischen Simulation. Für gemischte Verschränkungen bleibt der Mittelwert 0.

Die beiden 4-Qubit Zustände $|\phi_{14}\rangle$ und $|\phi_{15}\rangle$ sind ebenfalls Zustände einer Heisenberg Spinkette [43, 44]. Die Parameter ϵ_i und β_i sind abhängig von zwei weiteren Parametern, vgl. Kapitel 2 und Anhang A.

Der Zustand $|\phi_{14}\rangle$

$$|\phi_{14}\rangle = \epsilon_1 |1110\rangle + \epsilon_2 |1011\rangle + \epsilon_3 |0111\rangle - \epsilon_3 |1101\rangle \quad (4.34)$$

mit der Normierung $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\epsilon_3^2 = 1$ ist nur 2-Qubit verschränkt. Aus Gründen der Einfachheit wird nur die I-Concurrence reduziert auf Qubit 1 und Qubit 3 betrachtet:

$$IC_{\{1,3\}}^2 = 4(\epsilon_3^2 - \epsilon_3^4). \quad (4.35)$$

Man kann leicht zeigen, daß der Zustand ebenfalls die Beziehung (4.21) erfüllt:

$$\langle x \rangle_{\{1,3\}}^2 = \tilde{c}_1^2 \left(2\epsilon_3^2 - 1 \right)^2 = \tilde{c}_1^2 \left(1 - IC_{\{1,3\}}^2 \right). \quad (4.36)$$

Dieser Zusammenhang läßt sich ebenso leicht für $IC_{\{2,4\}}^2$ zeigen.

Wie bereits in Kapitel 2 diskutiert, ist die Verschränkungsstruktur für den Zustand $|\phi_{15}\rangle$

$$|\phi_{15}\rangle = -\beta_1|0011\rangle + \beta_1|0110\rangle - \beta_1|1001\rangle + \beta_1|1100\rangle - \beta_2|0101\rangle + \beta_2|1010\rangle \quad (4.37)$$

mit der Normierung $4\beta_1^2 + 2\beta_2^2 = 1$ komplexer, da die Quantifizierungsmöglichkeiten für eine 3- bzw. 4-Qubit Verschränkung fehlen. Aber im Vergleich mit den Bell Ungleichungen bzw. der CKW Ungleichung ist bekannt, daß neben der 2-Qubit Verschränkung eine höhere Verschränkung vorhanden ist.

Die 1-Qubit I-Concurrences sind parameterunabhängig:

$$IC_{\{1,2,3,4\}}^2 = 1. \quad (4.38)$$

Die Mittelwerte sind gleich Null:

$$\langle x \rangle_{\{1,2,3,4\}} = (2\beta_1^2 + \beta_2^2) \left(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_1^* \right) = 0. \quad (4.39)$$

Die Ergebnisse sind konsistent mit dem 3-Qubit Fall. Deswegen wird folgende Erklärung der Ergebnisse vermutet. Für rein verschränkte Coin Startzustände, d.h. pro Zustand nur eine Verschränkungsart (nur 2-Qubit verschränkt, nur 3-Qubit verschränkt. . . , usw.), ist der quadrierte Mittelwert proportional zur jeweiligen I-Concurrence, während für gemischt verschränkte Zustände der Mittelwert immer Null ist. Man kann aus den Ergebnissen nicht ableiten, ob ein glatter Übergang stattfindet. Der 3-Qubit Zustand $|\psi_{78}\rangle$, der einen Übergang in der Verschränkungsstruktur zeigt, hat parameterunabhängig einen Mittelwert gleich Null.

4.4 Subraumentwicklung

Eine Möglichkeit die zeitliche Entwicklung der Verschränkung zu betrachten, besteht im Coinunterraum. Die Gesamtwellenfunktion zum Zeitpunkt t besteht, wie bereits gesehen, aus zwei Anteilen, dem Ortsanteil und einem Anteil im Coinunterraum:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_x |x\rangle \otimes |\psi_C(x)\rangle \quad (4.40)$$

In diesem Abschnitt werden nun die Zustände $|\psi_C(x)\rangle$ genauer diskutiert. Mit einer künstlichen Normierung des Zustandes ist es möglich, an jedem Gitterpunkt die Globalverschränkung Q zu berechnen.

Aus der numerischen Simulation erhält man folgende Resultate:

- Für alle Coin Startzustände ist die Verschränkungsstruktur am Ursprung konstant in der Zeit.

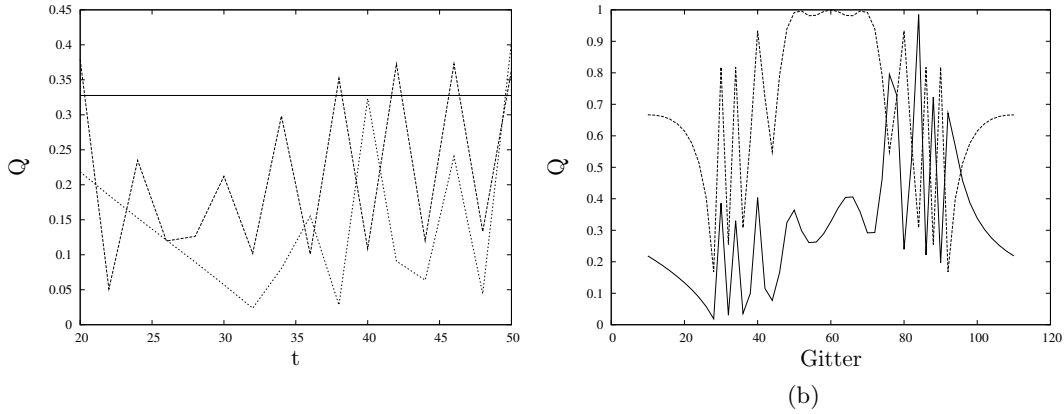


Abbildung 4.3: (a): Globalverschränkung Q als Funktion der Zeit für den parameterabhängigen GHZ Zustand, mit $\gamma = 0.3$, von verschiedenen Gitterpunkten aus gesehen. $x = 60$ (durchgezogene Linie), $x = 50$ (gestrichelte Linie) und $x = 40$ (gepunktete Linie). Der Startpunkt liegt bei $x = 60$. (b): Verteilung der Globalverschränkung Q auf dem Gitter für $t = 50$, für zwei verschiedene Parameter γ des Zustandes $|\gamma\text{GHZ}\rangle$, mit $\gamma = 1/\sqrt{2}$ (gestrichelte Linie) und $\gamma = 0.3$ (durchgezogene Linie).

- An anderen Gitterpunkten beobachtet man Oszillationen der Verschränkungsstruktur.

Diese beiden Effekte sind in Abb. 4.3a dargestellt, mit dem parameterabhängigen GHZ Zustand als Coin Startzustand. Am Startpunkt $x = 60$ ist die Verschränkung, gemessen mit dem Verschränkungsmaß Q , konstant in der Zeitentwicklung. Betrachtet man $x = 50$ oder $x = 40$ kann man die beschriebenen Verschrnkungsozillationen sehen. Ein weiterer Effekt ist in Abb. 4.3b gezeigt. Die Verschrnkungsverteilung auf dem Gitter ist bei $t = 50$ und dem parameterabhängigen GHZ Zustand als Coinstartzustand für zwei verschiedene Parameterwerte dargestellt. Für $\gamma = 1/\sqrt{2}$ ist der Ortsmittelwert gleich 0 und die Verschrnkungsverteilung auf dem Gitter ist symmetrisch. Wählt man $\gamma = 0.3$, erhält man einen von 0 verschiedenen Ortsmittelwert und die Verschrnkungsverteilung wird asymmetrisch.

4.5 Diskussion

In diesem Kapitel ist ein eindimensionales QW Modell mit multiplen Coins näher untersucht worden. Dabei wurde eine Beziehung zwischen den Ortsmittelwerten der Gitterverteilung und der Verschränkung des Coin Startzustandes, gemessen mit der I-Concurrence, gefunden. An verschiedenen Beispielen, die aus unterschiedlichen Verschränkungsklassen stammen, wurde gezeigt, daß der Zusammenhang nur Gültigkeit hat, solange die Zustände eine bestimmte Verschränkungsstruktur aufweisen. Das Kriterium hierfür ist der Unterschied, ob der Zustand nur eine Verschränkungsart, oder mehrere enthält. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind in einer Arbeit von Endrejat und Büttner [45] bereits verffentlicht.

Kapitel 5

Verschränkung und mehrdimensionale QW Modelle

Dieses Kapitel beschreibt die Erweiterung des Hadamard Walks auf mehr als eine räumliche Dimension. Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß es möglich ist, die räumlichen Mittelwerte eines eindimensionalen QW Modells auf die Verschränkung des Coin Startzustandes zu beziehen. Für Zustände mit einer bestimmten Verschränkungsstruktur konnte der direkte Zusammenhang mit einem Verschränkungsmaß hergeleitet werden. Das Modell soll nun bezüglich der Raumdimension erweitert werden. Da in höherdimensionalen QW Modellen neben den eindimensionalen Ortsmittelwerten, Korrelationen der verschiedenen Raumrichtungen betrachtet werden können, wird eine tiefer gehende Erkenntnis über die Verschränkungsstruktur des Coin Startzustandes erwartet.

Die Abbildung von Verschränkungsmaßen auf Korrelationsfunktionen ist in der Literatur im Zusammenhang mit Spinketten schon behandelt worden. In der Arbeit von Glaser et al. [50] werden die Concurrence, die I-Concurrence und das Tangle als Funktion von Spinkorrelationen dargestellt. Durch Kombination verschiedener Korrelationsfunktionen werden Beziehungen zu Verschränkungsmaßen ermöglicht. Die bereits erwähnte Kovarianz ist ebenfalls eine einfache Kombination verschiedener Erwartungswerte. In einer neueren Arbeit von Palumbo et al. [95] wird die Kovarianz in einem Spinsystem mit der Concurrence in Beziehung gesetzt. Die Charakterisierung der Verschränkung mit der Negativität der Kovarianzmatrix beschreibt die Arbeit von Usha Devi et al. [112]. Gühne et al. [54] stellen Quantenzustände als Kovarianzmatrix passender Observablen dar und können dadurch Beziehungen zu verschiedenen Verschränkungskriterien herstellen.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut. Der erste Abschnitt dient der Berechnung der Zeitentwicklung des Hadamard Walks. Dieser ist in der Literatur zwar schon ausführlich diskutiert worden, jedoch werden Vereinfachungen aufgezeigt, die bei der exakten Berechnung der Verteilungsmomente hilfreich sind. Die darauf folgenden Abschnitte behandeln jeweils zwei-, drei- und vierdimensionale QW Modelle. Zum einen wird eine exakte Darstellung der Ortserwartungswerte in Abhängigkeit der Komponenten des Coin Startzustandes berechnet. Desweiteren werden die Erwartungswerte bezüglich der Verschränkung dieser Zustände untersucht. Mit den Charakteristika der Gitterverteilung ist es möglich, die Verschränkungsstruktur des Coin Startzustandes zu verstehen bzw. genauer zu analysieren. Durch Kombination verschiedener Ortskorrelationsfunktionen ist es sogar möglich, die unterschiedlichen Verschränkungen auch komplizierter Zustände zu messen.

5.1 Berechnungen zur Hadamard Entwicklung

5.1.1 Fouriertransformation und Zeitentwicklung

Durch die Vorarbeiten von Nayak und Vishwanath [90] und Brun et al. [25] kann die exakte Zeitentwicklung des Hadamard Walks berechnet werden. Mittels einer Fouriertransformation erhält man die Darstellung des Hadamard Operators im k -Raum:

$$H_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ik} & e^{ik} \\ e^{-ik} & -e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Die Berechnung der Eigenwerte ergibt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \sqrt{1 + \cos^2 k} + i \sin k \right) \quad (5.2)$$

Ziel ist die Berechnung der Zeitentwicklung H_k^t . Die t -malige Matrixmultiplikation läßt sich umgehen. Mit einer Ähnlichkeitstransformation kann die Matrix zerlegt werden. Mit

$$T = \begin{pmatrix} c_+ & c_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \frac{1}{c_+ - c_-} \begin{pmatrix} 1 & -c_- \\ -1 & c_+ \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

und

$$c_{\pm} = e^{ik} (\cos k \pm \sqrt{1 + \cos^2 k}) \quad (5.4)$$

ergibt sich folgende Zerlegung:

$$H_k^t = T \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (5.5)$$

Die Matrixmultiplikation reduziert sich somit auf t -maliges Potenzieren der Eigenwerte. Nun werden die Elemente dieser Matrix berechnet:

$$H_k^t = \frac{1}{c_+ - c_-} \begin{pmatrix} c_+ \lambda_1^t - c_- \lambda_2^t & -c_+ c_- (\lambda_1^t - \lambda_2^t) \\ \lambda_1^t - \lambda_2^t & -\lambda_1^t c_- + \lambda_2^t c_+ \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Um die Zeitentwicklung der Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ zu berechnen, geht man in die Exponentialdarstellung über. Aufgrund des Vorzeichenwechsels im Imaginärteil, bei einer Integration zwischen $-\pi$ und π , muß man eine Fallunterscheidung machen. Für $k \in [0, \pi]$ ergibt sich:

$$\theta_1 = \arccos \sqrt{\frac{1 + \cos^2 k}{2}} \Rightarrow \lambda_1^t = e^{it\theta_1} \quad (5.7)$$

$$\theta_2 = \arccos(-\sqrt{\frac{1 + \cos^2 k}{2}}) = \pi - \theta_1 \Rightarrow \lambda_2^t = e^{i\pi t} e^{-it\theta_1} = (-1)^t e^{-it\theta_1} \quad (5.8)$$

und für $k \in [-\pi, 0[$ erhält man:

$$\theta_1 = -\arccos \sqrt{\frac{1 + \cos^2 k}{2}} \Rightarrow \lambda_1^t = e^{it\theta_1} \quad (5.9)$$

$$\theta_2 = -\arccos(-\sqrt{\frac{1 + \cos^2 k}{2}}) = -\pi - \theta_1 \Rightarrow \lambda_2^t = e^{-i\pi t} e^{-it\theta_1} = (-1)^t e^{-it\theta_1}. \quad (5.10)$$

Im folgenden wird t gerade angenommen und für $\theta_1 = \theta$ geschrieben. Damit ergibt sich für die Summe bzw. Differenz der Eigenwerte im positiven k -Bereich $k \in [0, \pi]$ sowie im negativen k -Bereich $k \in [-\pi, 0]$:

$$\lambda_1^t + \lambda_2^t = 2 \cos t\theta \quad \lambda_1^t - \lambda_2^t = 2i \sin t\theta. \quad (5.11)$$

Weitere Zwischenrechnungen liefern:

$$\frac{c_+}{c_+ - c_-} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} + 1 \right) \quad \frac{c_-}{c_+ - c_-} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} - 1 \right) \quad (5.12)$$

und

$$c_+ c_- = -e^{2ik} \quad c_+ - c_- = 2e^{ik} \sqrt{1 + \cos^2 k}. \quad (5.13)$$

Daraus folgt für die Elemente a_{ij} der Matrix H_k^t :

$$a_{11} = \frac{i \cos k \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} + \cos t\theta \quad a_{12} = \frac{ie^{ik} \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (5.14)$$

$$a_{21} = \frac{ie^{-ik} \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} = -a_{12}^* \quad a_{22} = \frac{-i \cos k \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} + \cos t\theta = a_{11}^*. \quad (5.15)$$

Man erhält also eine vereinfachte Darstellung:

$$H_k^t = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

wobei $a_{11} := a$ und $a_{12} := b$ gilt.

5.1.2 Berechnung der Erwartungswerte

Wie bereits in Kapitel 3 gezeigt, können mit einer Erweiterung der Gleichung von Brun et al. [25] die Ortserwartungswerte der höherdimensionalen QW Modelle analytisch berechnet werden. Ausgangspunkt war der Zusammenhang zur Berechnung der Momente des eindimensionalen QW:

$$\langle x^m \rangle = \frac{i^m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \langle \phi_0 | (U_k^\dagger)^t \left[\frac{d^m}{dk^m} U_k^t \right] | \phi_0 \rangle \quad (5.17)$$

wobei U_k ein allgemeiner Coinoperator und $|\phi_0\rangle$ der Startzustand im Coinraum ist. In den folgenden Modellen werden Produkte des Hadamardoperators H als Coinoperator verwendet. In den beiden nächsten Unterabschnitten sollen nun Vereinfachungen des Operators im Integranden

$$(H_k^\dagger)^t \frac{d^m}{dk^m} H_k^t \quad (5.18)$$

abgeleitet werden. Diese Vereinfachungen ermöglichen eine weitere analytische Auswertung.

5.1.2.1 Mittelwerte

Zur Berechnung der Mittelwerte setzt man in (5.17) $m = 1$ und erhält für die Entwicklungsmatrix:

$$(H_k^\dagger)^t \frac{d}{dk} H_k^t = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ (-b^*)' & (a^*)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* a' + b(b^*)' & a^* b' - (a^*)' b \\ a' b^* - a(b^*)' & a(a^*)' + b' b^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ -d_1^* & c_1^* \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Nachstehend werden nun einige Zusammenhänge für die Elemente dieser Matrix gezeigt.

Lemma 1. $c_1 = -c_1^*$

Beweis.

$$c_1 + c_1^* = a^* a' + b b'^* + a'^* a + b' b^* = (a a^*)' + (b b^*)' = (|a|^2 + |b|^2)' = 0, \quad (5.20)$$

da $|a|^2 + |b|^2 = 1$. \square

Lemma 2. $\int_{-\pi}^{\pi} dk (d_1 + d_1^*) = 0$

Beweis.

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk d_1 + d_1^* = \int_{-\pi}^{\pi} dk 2\operatorname{Re}(d_1) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} dk \operatorname{Re}(a^* b' - (a^*)' b) \quad (5.21)$$

Dies führt auf den Integranden:

$$\operatorname{Re}(a^* b' - (a^*)' b) = -\frac{t \cos k \sin k}{1 + \cos^2 k} + \frac{\sin 2t\theta}{(1 + \cos^2 k)^{3/2}}. \quad (5.22)$$

Da beide Teilintegranden ungerade Funktionen sind und das Integral symmetrisch um den Nullpunkt liegt, ist das Gesamtintegral gleich 0. \square

Im weiteren Verlauf werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\tilde{c}_1 := \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk c_1 \quad (5.23)$$

$$\tilde{d}_1 := \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk d_1. \quad (5.24)$$

Das Integral \tilde{c}_1 kann mit einem Computeralgebra System ausgewertet werden. Man erhält als relevanten Teil:

$$\tilde{c}_1 \sim \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{1 - t(1 + \cos 2k)}{2\pi(3 + \cos 2k)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)t \quad (5.25)$$

Der nichtrelevante Anteil des \tilde{c}_1 Integrals liefert für große Zeiten t nur einen sehr kleinen Beitrag:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk \left(\frac{\sin k \sin 2t\theta}{\sqrt{2\pi}(3 + \cos 2k)^{3/2}} - \frac{(3 + \cos 2k) \cos 2t\theta}{2\pi(3 + \cos 2k)^2} \right) < 0.02 \quad \text{für } t > 100. \quad (5.26)$$

Nun zur Auswertung des Integrals \tilde{d}_1 :

$$\tilde{d}_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk (a^* b' - a'^* b) \quad (5.27)$$

Die Berechnung der einzelnen Ableitungen liefert:

$$a'^* = -\frac{it \cos^2 k \cos t\theta}{1 + \cos^2 k} - \frac{i \cos^2 k \sin k \sin t\theta}{(1 + \cos^2 k)^{3/2}} + \frac{i \sin k \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} - \frac{t \cos k \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (5.28)$$

$$b' = \frac{ie^{ik} t \cos k \cos t\theta}{1 + \cos^2 k} - \frac{e^{ik} \sin t\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} + \frac{ie^{ik} \cos k \sin k \sin t\theta}{(1 + \cos^2 k)^{3/2}}. \quad (5.29)$$

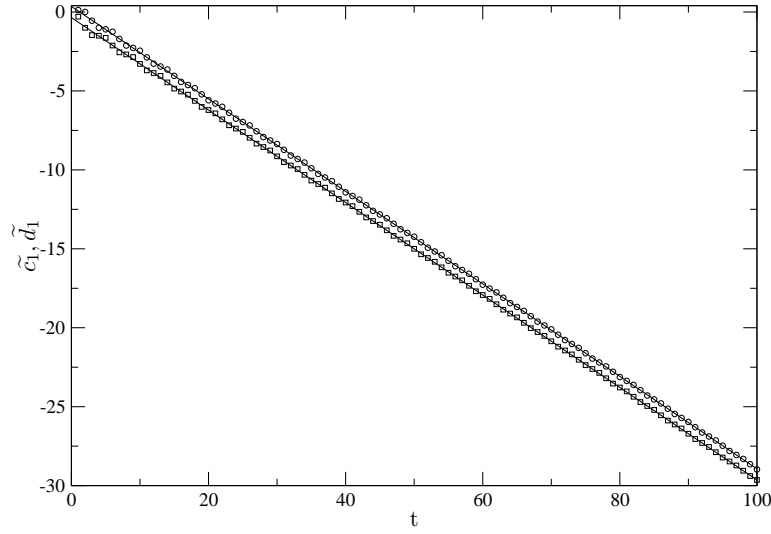


Abbildung 5.1: Auswertung des Integrals \tilde{c}_1 (Kreise) und des Integrals \tilde{d}_1 (Quadrate) als Funktion der Zeit. Die numerisch bestimmten Punkte sind mit den jeweiligen Näherungen (5.25) bzw. (5.31) verglichen.

Daraus folgt für den Integranden:

$$a^*b' - a^{*'}b = \frac{ite^{ik} \cos k}{1 + \cos^2 k} + \frac{i \sin^2 t\theta}{1 + \cos^2 k} - \frac{i \sin k \cos t\theta \sin t\theta}{(1 + \cos^2 k)^{3/2}} \quad (5.30)$$

Die weitere Auswertung mittels Computeralgebra System liefert:

$$\tilde{d}_1 \sim -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)t \quad (5.31)$$

In Abb. 5.1 wird die numerische Auswertung der Gesamtintegrale \tilde{c}_1 und \tilde{d}_1 mit den jeweiligen Näherungsrechnungen verglichen. Man erhält eine sehr gute Übereinstimmung. Eine lineare Regression der numerischen Punkte liefert ein ähnliches Ergebnis:

$$\tilde{c}_1 \sim 0.361 - 0.293t \quad \tilde{d}_1 \sim -0.350 - 0.293t \quad (5.32)$$

Für sehr große Zeiten fallen die unterschiedlichen Ordinatenabschnitte zwischen \tilde{c}_1 und \tilde{d}_1 nicht mehr ins Gewicht, die Integrale sind ungefähr gleich:

$$\tilde{c}_1 \sim \tilde{d}_1 \quad (5.33)$$

5.1.2.2 Varianzen

Zur Berechnung der zweiten Momente wird Gleichung (5.17) für $m = 2$ ausgewertet. Die Berechnung des Entwicklungsoperators liefert:

$$(H_k^\dagger)^t \frac{d^2}{dk^2} H_k^t = \begin{pmatrix} a^*a'' + b(b^*)'' & a^*b'' - (a^*)''b \\ a''b^* - a(b^*)'' & a(a^*)'' + b''b^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ -d_2^* & c_2^* \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\tilde{c}_2 := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \, c_2 \quad \tilde{d}_2 := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \, d_2. \quad (5.35)$$

Nachstehend wird gezeigt, daß obige Matrix nach ausführen der Integration diagonal ist und die Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich sind.

Lemma 3. $\int_{-\pi}^{\pi} dk (c_2 - c_2^*) = 0$

Beweis.

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk c_2 - c_2^* = \int_{-\pi}^{\pi} dk (a^* a'' - a a^{*''}) + (b b^{*''} - b^* b'') \quad (5.36)$$

Mit der Identität:

$$(a^* a' - a a^{*'})' = (a^{*'} a' + a^* a'') - (a^{*'} a' + a^{*''} a) = a^* a'' - a^{*''} a \quad (5.37)$$

$$(b b^{*'} - b^* b')' = (b^{*'} b' + b^{*''} b) - (b^{*'} b' + b^* b'') = b b^{*''} - b^* b'' \quad (5.38)$$

läßt sich die Integration vereinfachen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk c_2 - c_2^* = \int_{-\pi}^{\pi} dk \{ (a^* a' - a a^{*'})' + (b b^{*'} - b^* b')' \}. \quad (5.39)$$

Die beiden Teile kann man zusammenfassen:

$$a^* a' - a a^{*'} = 2i \operatorname{Im}(a^* a') \quad b b^{*'} - b^* b' = 2i \operatorname{Im}(b b^{*'})$$

mit

$$\operatorname{Im}(a^* a') = \frac{t \cos^2 k}{1 + \cos^2 k} - \frac{\sin k \sin 2t\theta}{2(1 + \cos^2 k)^{3/2}} \quad (5.40)$$

$$\operatorname{Im}(b b^{*'}) = -\frac{\sin^2 t\theta}{1 + \cos^2 k}. \quad (5.41)$$

Die Integration ist also auf eine Auswertung der Teilfunktionen zurückgeführt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk (c_2 - c_2^*) = 2i \left[\operatorname{Im}(a^* a') \right]_{-\pi}^{\pi} + 2i \left[\operatorname{Im}(b b^{*'}) \right]_{-\pi}^{\pi}, \quad (5.42)$$

wobei beide Teile nach einsetzen Null ergeben. \square

Lemma 4. $\int_{-\pi}^{\pi} dk d_2 = 0$

Beweis.

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk d_2 = \int_{-\pi}^{\pi} dk (a^* b'' - a^{*''} b) \quad (5.43)$$

Mit Umschreiben des Integranden:

$$(a^* b' - a^{*'} b)' = (a^{*'} b' + a^* b'') - (a^{*'} b' + a^{*''} b) = a^* b'' - a^{*''} b \quad (5.44)$$

läßt sich die Integration vereinfachen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dk (a^* b'' - a^{*''} b) = \int_{-\pi}^{\pi} dk (a^* b' - a^{*'} b)' = [a^* b' - a^{*'} b]_{-\pi}^{\pi}. \quad (5.45)$$

Dies ergibt ebenfalls Null, wie sich durch einsetzen der Grenzen überprüfen läßt. \square

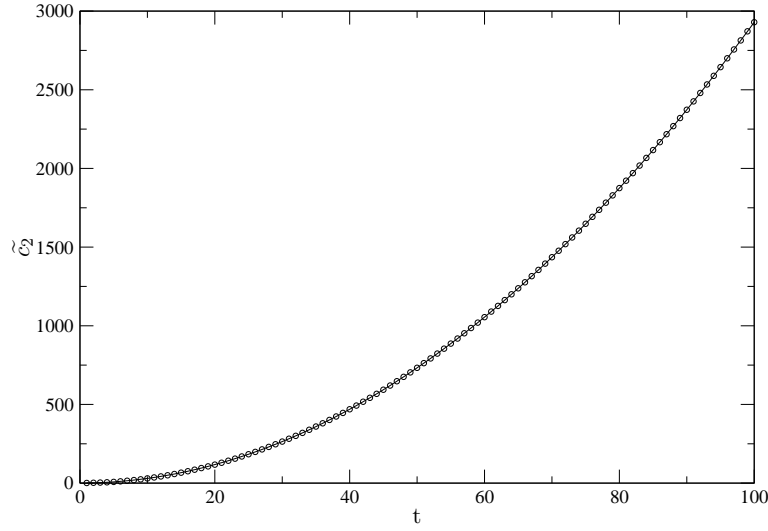


Abbildung 5.2: Numerische Auswertung des Integrals \tilde{c}_2 als Funktion der Zeit. Die numerischen Punkte sind mit einer quadratischen Abhängigkeit gefittet, $\tilde{c}_2 = A_0 + A_1 t^2$, mit $A_0 = 0.534$ und $A_1 = 0.293$

Nun zur Auswertung des Integrals \tilde{c}_2 . Der Integrand lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$c_2 = a^* a'' + b b^{*''} = (a^* a')' - a^{*'} a' + (b b^{*'})' - b' b^{*'} = (a^* a')' + (b b^{*'})' - (|a'|^2 + |b'|^2). \quad (5.46)$$

Die Integration über den ersten Teil vereinfacht sich mittels des Hauptsatzes der Integralrechnung, wobei die Auswertung für die beiden Teilbereiche, $k \geq 0$ bzw. $k < 0$, mit einem Computeralgebra System erfolgt ist:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk (a^* a')' + (b b^{*'})' = -\frac{1}{2\pi} \left[a^* a' + b b^{*'} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (5.47)$$

Für das zweite Integral erhält man näherungsweise den Ausdruck:

$$\tilde{c}_2 \sim \frac{3\sqrt{2}}{8} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) t^2. \quad (5.48)$$

In Abb. 5.2 ist die numerische Auswertung des Integrals \tilde{c}_2 als Funktion der Zeit aufgetragen. Die numerischen Punkte sind mit einer quadratischen Abhängigkeit angefitet, mit dem Ergebnis:

$$\tilde{c}_2 \sim 0.534 + 0.293 t^2, \quad (5.49)$$

welches sehr gut mit der Näherungsrechnung übereinstimmt.

Für große Zeiten t kann der Vorfaktor vernachlässigt werden. Dadurch werden die Integrale \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 vergleichbar:

$$\tilde{c}_1^2 \simeq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tilde{c}_2. \quad (5.50)$$

5.2 Zweidimensionaler QW

5.2.1 Berechnung der Erwartungswerte

Im folgenden werden die Ortserwartungswerte für einen allgemeinen Coin Startzustand

$$|\phi_0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \quad (5.51)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, abgeleitet. Dazu werden die oben bewiesenen Vereinfachungen bzw. Relationen verwendet. Betrachtet werden die Mittelwerte sowie die 2. Momente. Zur Berechnung wird zuerst der Integrand der Gleichung (3.76) ausgewertet.

$$\langle x \rangle = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{k_x, k_y = -\pi}^{\pi} dk_x dk_y \langle \phi_0 | \underbrace{(H_{k_x}^\dagger)^t \frac{d}{dk_x} H_{k_x}^t}_{:= \tilde{H}_{k_x}^{(1)}} \otimes \underbrace{(H_{k_y}^\dagger)^t H_{k_y}^t}_{=\mathbb{1}} | \phi_0 \rangle, \quad (5.52)$$

wobei folgende Kurzschreibweise eingeführt wurde:

$$\tilde{H}_{k_x}^{(1)} := (H_{k_x}^\dagger)^t \frac{d}{dk_x} H_{k_x}^t \quad (5.53)$$

Die Integration über k_y liefert einen Faktor 2π :

$$\langle x \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(1)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.54)$$

Der Operator $\tilde{H}_{k_x}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$ sieht in Matrixdarstellung wie folgt aus:

$$\tilde{H}_{k_x}^{(1)} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ -d_1^* & c_1^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

Die Auswertung des Integranden liefert:

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(1)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle &= c_1 \{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 \} + c_1^* \{ |\gamma|^2 + |\delta|^2 \} + \\ &\quad d_1 \{ \alpha^* \gamma + \beta^* \delta \} - d_1^* \{ \alpha \gamma^* + \beta \delta^* \} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Nun kann die Integration ausgeführt werden. Mit den Lemmas (1) und (2) lassen sich die jeweiligen Koeffizienten zusammenziehen. Dies führt auf einen Ausdruck für den x -Mittelwert in Abhängigkeit der Amplituden des Coin Startzustandes:

$$\langle x \rangle = \tilde{c}_1 \{ |\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\gamma|^2 - |\delta|^2 \} + \tilde{d}_1 \{ \alpha^* \gamma + \beta^* \delta + \alpha \gamma^* + \beta \delta^* \} \quad (5.57)$$

Die Zeitabhängigkeit des Mittelwertes steckt alleine in den \tilde{c}_1 bzw. \tilde{d}_1 Integralen. Die Berechnung des Mittelwertes in y -Richtung erfolgt ähnlich. Man erhält durch Einsetzen in (3.77):

$$\langle y \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(1)} | \phi_0 \rangle, \quad (5.58)$$

wobei $\tilde{H}_{k_y}^{(1)}$ äquivalent zu (5.53) definiert ist. Die Auswertung des Integranden liefert

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(1)} | \phi_0 \rangle &= c_1 \{ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \} + c_1^* \{ |\beta|^2 + |\delta|^2 \} + \\ &\quad d_1 \{ \alpha^* \beta + \gamma^* \delta \} - d_1^* \{ \alpha \beta^* + \gamma \delta^* \} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Somit erhält man ebenfalls die Darstellung des y -Mittelwertes als Funktion der Amplituden des Coin Startzustandes:

$$\langle y \rangle = \tilde{c}_1 \{ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 - |\beta|^2 - |\delta|^2 \} + \tilde{d}_1 \{ \alpha^* \beta + \gamma^* \delta + \alpha \beta^* + \gamma \delta^* \} \quad (5.60)$$

Die Berechnung des zweiten Momentes erfolgt ähnlich und erfordert die Auswertung des Integrals:

$$\langle x^2 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_x, k_y = -\pi}^{\pi} dk_x dk_y \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(2)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle, \quad (5.61)$$

mit der verwendeten Abkürzung:

$$\tilde{H}_{k_x}^{(2)} := (H_{k_x}^\dagger)^t \frac{d^2}{dk_x^2} H_{k_x}^t. \quad (5.62)$$

Nach ausführen der k_y Integration erhält man

$$\langle x^2 \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(2)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.63)$$

Da der Operator, wie in den Lemmas (3) und (4) gezeigt, diagonal ist:

$$\tilde{H}_{k_x}^{(2)} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

liefert die Auswertung des Integrals ein zweites Moment unabhängig vom Coin Startzustand:

$$\langle x^2 \rangle = \tilde{c}_2 \quad (5.65)$$

Die Startzustand Abhängigkeit der Varianz resultiert also aus der Abhängigkeit des Mittelwertes. Zur Berechnung von $\langle y^2 \rangle$ benötigt man den Integranden $\langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(2)} | \phi_0 \rangle$ und erhält ebenfalls:

$$\langle y^2 \rangle = \tilde{c}_2 \quad (5.66)$$

Die Berechnung des zweidimensionalen Erwartungswertes $\langle xy \rangle$ ist gleichbedeutend mit der Auswertung des Integrals:

$$\langle xy \rangle = \frac{i^2}{(2\pi)^2} \int_{k_x, k_y = -\pi}^{\pi} dk_x dk_y \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.67)$$

Unter Benutzung der Hilfsbeziehungen (1) und (2) erhält man

$$\begin{aligned} \langle xy \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ (|\alpha|^2 + |\delta|^2) - (|\beta|^2 + |\gamma|^2) \right\} + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha^* \delta + \alpha \delta^* + \beta \gamma^* + \beta^* \gamma \right\} \\ & + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha^* \beta + \alpha \beta^* + \alpha^* \gamma + \alpha \gamma^* - \beta \delta^* - \beta^* \delta - \gamma \delta^* - \gamma^* \delta \right\} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Dieser Ausdruck kann weiter vereinfacht werden. Wie oben gezeigt, sind im Limes großer Zeiten t die Integrale \tilde{c}_1 und \tilde{d}_1 gleich und man erhält:

$$\langle xy \rangle \simeq |\alpha + \delta|^2 - |\beta - \gamma|^2 + (\alpha - \delta)(\beta^* + \gamma^*) + (\alpha^* + \delta^*)(\beta - \gamma) \quad (5.69)$$

Die Berechnung der zweidimensionalen zweiten Momente liefert aufgrund der Diagonalgestalt der Entwicklungsmatrix keine weiteren Informationen. Zur Berechnung werden folgende Integranden verwendet:

$$\langle x^2 y \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(2)} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.70)$$

$$\langle x y^2 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(2)} | \phi_0 \rangle \quad (5.71)$$

$$\langle x^2 y^2 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_x}^{(2)} \otimes \tilde{H}_{k_y}^{(2)} | \phi_0 \rangle \quad (5.72)$$

und man erhält nach ausführen der Integration die Ortserwartungswerte:

$$\langle x y^2 \rangle = \tilde{c}_2 \langle x \rangle \quad (5.73)$$

$$\langle x^2 y \rangle = \tilde{c}_2 \langle y \rangle \quad (5.74)$$

$$\langle x^2 y^2 \rangle = \tilde{c}_2^2 \quad (5.75)$$

Durch Kombination mit einem zweiten Moment erhält man den eindimensionalen Erwartungswert, multipliziert mit dem Faktor \tilde{c}_2 .

5.2.2 Mittelwerte und I-Concurrence

Das Hauptergebnis des vorangegangenen Kapitels war ein Zusammenhang zwischen den quadratischen Mittelwerten und der I-Concurrence. Diesen Zusammenhang kann man ebenfalls für zweidimensionale QW Modelle ableiten.

Die I-Concurrence ist eine Funktion der reduzierten Dichtematrizen $\rho_1 = \text{tr}_2 \rho_{12}$ bzw. $\rho_2 = \text{tr}_1 \rho_{12}$, mit $\rho_{12} = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$:

$$IC_{1-2} = \sqrt{2(1 - \text{tr} \rho_1^2)} \quad IC_{2-1} = \sqrt{2(1 - \text{tr} \rho_2^2)} \quad (5.76)$$

Das Ziel sind Gleichungen der Form:

$$\langle x \rangle^2 \sim (1 - IC_{1-2}^2) \quad \langle y \rangle^2 \sim (1 - IC_{2-1}^2) \quad (5.77)$$

Der rechte Teil der Gleichungen kann mit obigem Zusammenhang auch als

$$1 - IC_i^2 = 2 \text{tr}(\rho_i^2) - 1 \quad (5.78)$$

geschrieben werden. Für den allgemeinen 2-Qubit Zustand (5.51) berechnen sich die reduzierten Dichtematrizen wie folgt:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \alpha^*\gamma + \beta^*\delta & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 & \alpha\beta^* + \gamma\delta^* \\ \alpha^*\beta + \gamma^*\delta & |\beta|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

Die Spurbildung über die quadratischen Matrizen liefert:

$$\text{tr}(\rho_1^2) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 + (|\gamma|^2 + |\delta|^2)^2 + 2(\alpha\gamma^* + \beta\delta^*)(\alpha^*\gamma + \beta^*\delta) \quad (5.80)$$

$$\text{tr}(\rho_2^2) = (|\alpha|^2 + |\gamma|^2)^2 + (|\beta|^2 + |\delta|^2)^2 + 2(\alpha\beta^* + \gamma\delta^*)(\alpha^*\beta + \gamma^*\delta) \quad (5.81)$$

Die Ableitung der obigen Form soll nun detailliert für $\langle x \rangle^2$ nachvollzogen werden, die Ableitung für $\langle y \rangle^2$ erfolgt auf gleichem Wege. Die Spur über die quadrierte reduzierte Dichtematrix ρ_1 , kann als Funktion der Elemente von ρ_1 geschrieben werden:

$$\text{tr}(\rho_1^2) = R_{11}^2 + R_{22}^2 + 2R_{12}R_{21}, \quad (5.82)$$

mit den Elementen:

$$R_{11} := (\rho_1)_{11} \quad R_{12} := (\rho_1)_{12} \quad (5.83)$$

$$R_{21} := (\rho_1)_{21} \quad R_{22} := (\rho_1)_{22} \quad (5.84)$$

Der x -Mittelwert (5.57) läßt sich ebenfalls als Funktion dieser Elemente darstellen:

$$\langle x \rangle = \tilde{c}_1(R_{11} - R_{22}) + \tilde{d}_1(R_{12} + R_{21}) \quad (5.85)$$

Quadriert man nun den x -Mittelwert, so erhält man:

$$\langle x \rangle^2 = \tilde{c}_1^2(R_{11} - R_{22})^2 + \tilde{d}_1^2(R_{12} + R_{21})^2 + 2\tilde{c}_1\tilde{d}_1(R_{11} - R_{22})(R_{12} + R_{21}) \quad (5.86)$$

Im Limes großer Zeiten sind \tilde{c}_1 und \tilde{d}_1 gleich. Die Terme lassen sich dann geschickt zusammenfassen und auf eine Form bringen, die der Ausgangsform entspricht:

$$\langle x \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_{1-2}^2) + \text{Rest}_x \right\}, \quad (5.87)$$

wobei

$$\text{Rest}_x = (R_{12} - R_{21})^2 + (R_{11} - R_{22})(R_{12} + R_{21}) \quad (5.88)$$

Die Gleichheit ist natürlich nur im asymptotischen Bereich vorhanden, weswegen eigentlich ein \simeq Zeichen passender wäre. Wenn im folgenden dieser Zusammenhang verwendet wird, ist also immer der Limes großer Zeiten gemeint.

Durch eine ähnliche Rechnung läßt sich der y -Mittelwert ebenfalls auf die gewünschte Darstellung bringen:

$$\langle y \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_{2-1}^2) + \text{Rest}_y \right\}, \quad (5.89)$$

wobei für den Term Rest_y nun natürlich die Elemente von ρ_2 eingesetzt werden müssen.

Der Restterm Rest_x läßt sich für eine weitere Diskussion zusammenfassen:

$$\text{Rest}_x = -4\{\text{Im}(R_{12})\}^2 + 2(R_{11} - R_{22})\text{Re}(R_{12}) \quad (5.90)$$

Es stellt sich die Frage, für welche Zustände $|\phi_0\rangle$ dieser Restterm gleich 0 ist? Der Restterm verschwindet für alle Zustände, die in der Bell Form (2.3) vorliegen, also:

$$\alpha|00\rangle + \delta|11\rangle \quad \text{bzw.} \quad \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle, \quad (5.91)$$

sowohl mit reellen als auch komplexen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Für andere Zustände, wie z.B.

$$\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle, \quad (5.92)$$

liefert der Term Rest_x einen endlichen Beitrag. Dies paßt nicht ins Bild des Ergebnisses aus Kapitel 4 (vgl. Seite 57), wo eine gemischte Verschränkung als Antwort vorgeschlagen wurde. Im Falle von reinen 2-Qubit Zuständen existiert nach gängiger Meinung nur eine Art der Verschränkung und diese kann mit der Concurrence gemessen werden.

Interessant ist der Zusammenhang zwischen I-Concurrence und Korrelation, im Vergleich mit den Ergebnissen von Glaser et al. [50]. Hier wird die I-Concurrence mit Spinkorrelationen in Beziehung gesetzt. Sie erhalten folgenden Zusammenhang:

$$IC_i^2 = 1 - \langle \sigma_i^z \rangle^2 - 4\langle \sigma_i^+ \rangle \langle \sigma_i^- \rangle, \quad (5.93)$$

wobei die σ_i die Standard Paulioperatoren, bezogen auf das i -te Qubit sind. Der quadratische σ^z Erwartungswert ist, bis auf einen Restterm, proportional zu $1 - IC_i^2$.

5.2.3 Kovarianz und Korrelationen

Die Kovarianz ist definiert als:

$$\text{Cov}(x, y) = \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (5.94)$$

und ist ein Maß für eine Korrelation der beiden Ortsverteilungen x und y . Die Kovarianz ergibt sich aus der Kombination der bereits abgeleiteten Erwartungswerte zu:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) = & \tilde{c}_1^2 \left\{ (|\alpha|^2 + |\delta|^2) - (|\beta|^2 + |\gamma|^2) - (|\alpha|^2 - |\delta|^2)^2 + (|\beta|^2 - |\gamma|^2)^2 \right\} + \\ & \tilde{d}_1^2 \left\{ (|\alpha|^2 + |\delta|^2)(\alpha^* \delta + \alpha \delta^*) + (|\beta|^2 + |\gamma|^2)(\beta^* \gamma + \beta \gamma^*) - \right. \\ & \left. \gamma \beta (\alpha^{*2} + \delta^{*2}) \gamma^* \beta^* (\alpha^2 + \delta^2) - \alpha \delta (\beta^{*2} + \gamma^{*2}) \alpha^* \delta^* (\beta^2 + \gamma^2) \right\} \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ 2(|\gamma|^2 + |\delta|^2)(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) + 2(|\beta|^2 + |\delta|^2)(\alpha^* \gamma + \alpha \gamma^*) - \right. \\ & \left. 2(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)(\beta^* \delta + \beta \delta^*) - 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(\gamma^* \delta + \gamma \delta^*) \right\}. \quad (5.95) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich unter der Annahme reeller Parameter auf folgende Form bringen:

$$\text{Cov}(x, y) = 2(\alpha\delta - \beta\gamma) \left[-(\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + 2(\alpha - \delta)(\beta + \gamma) \right]. \quad (5.96)$$

Der erste Faktor entspricht genau der Darstellung der Concurrence, vgl. (2.11). Eine von Null verschiedene Concurrence ist also eine notwendige Bedingung für eine endliche Kovarianz, also einer Korrelation der x - und y -Richtung.

Der Korrelationskoeffizient (3.73), welcher einer normierten Kovarianz mit den jeweiligen Standardabweichungen entspricht, wird hier nicht weiter untersucht. Eine mögliche Parameterabhängigkeit würde bei der Normierung durch die Parameterabhängigkeit der Mittelwerte verfälscht. Stattdessen wird nachstehend die Kovarianz untersucht, die mit Potenzen von \tilde{c}_1 auf die nötige Größe umskaliert wird.

5.2.4 Betrachtung eines Beispielszustandes

Die abgeleiteten Mittelwerte bzw. Verschränkungsrelationen sollen nun anhand eines 2-Qubit Beispielszustandes diskutiert werden. Wie im einleitenden Kapitel über Verschränkungsmaße bereits erörtert, existiert nur eine Verschränkungsart für 2-Qubit Zustände. Der Prototyp dieser Verschränkungsklasse ist der EPR-Zustand. Die Verschränkung der 2-Qubit Zustände kann mit der Concurrence berechnet werden.

Der hier diskutierte Zustand ist eine parameterabhängige Verallgemeinerung des EPR-Zustandes:

$$|\phi_0\rangle = \gamma|00\rangle + e^{i\varphi} \sqrt{1 - \gamma^2} |11\rangle, \quad (5.97)$$

mit $\gamma \in [0, 1]$ und einer allgemeinen Phase $\varphi \in [0, 2\pi]$. Die Concurrence für diesen Zustand berechnet sich nach Gleichung (2.11) zu:

$$C(|\Phi_0\rangle) = 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad (5.98)$$

unabhängig vom Phasenwinkel φ . Die I-Concurrences IC_{1-2} bzw. IC_{2-1} sind im 2-Qubit Fall gleich und entsprechen der Concurrence.

Die eindimensionalen Erwartungswerte ergeben sich mit den allgemeinen Beziehungen (5.57) bzw. (5.60) zu:

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = \tilde{c}_1(2\gamma^2 - 1). \quad (5.99)$$

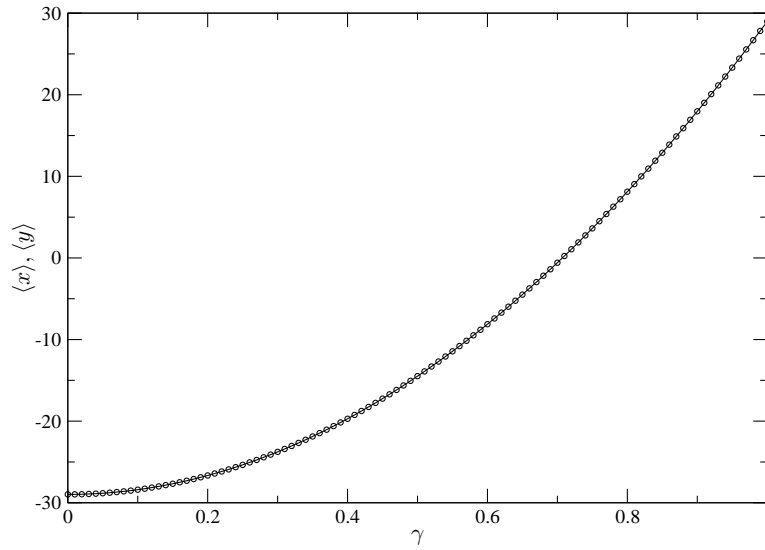


Abbildung 5.3: Mittelwerte $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ des Beispielszustandes (5.97) als Funktion von γ . Die numerischen Punkte sind mit der analytischen Lösung $A_0(2\gamma^2 - 1)$ gefittet, mit dem Ergebnis $A_0 = 28.9756$. Die Simulation des QW erfolgte auf einem Gitter mit der Größe $g = 220$ pro Richtung, der Walker war $t = 100$ Zeitschritte unterwegs.

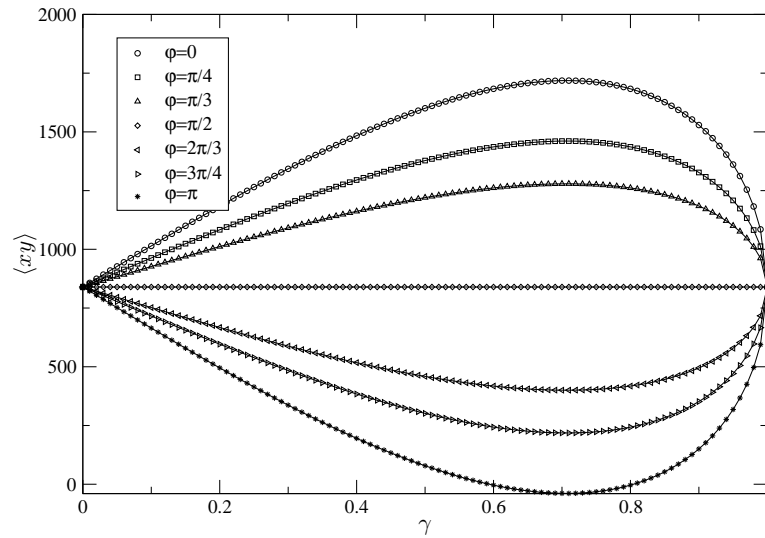


Abbildung 5.4: Mittelwert $\langle xy \rangle$ für den Beispielszustand (5.97) als Funktion von γ für verschiedene φ . Die jeweiligen numerischen Punkte sind mit der passenden analytischen Lösung $A_0 + A_1 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi$ angepaßt. Mit dem Ergebnis $A_0 = 839.583$ und $A_1 = 878.688$. Numerische Simulation des QW mit $g = 220$ pro Richtung und $t = 100$.

Diese Erwartungswerte erfüllen die allgemeinen Zusammenhänge (5.87) bzw. (5.89) mit der I-Concurrence, die Restterme Rest_x bzw. Rest_y sind für diesen Zustand gleich 0. Die Verschränkung des Zustandes ist also durch Angabe bzw. Messung der eindimensionalen Ortserwartungswerte komplett charakterisiert, da durch die I-Concurrences auch die Concurrences bestimmt sind. In Abb. 5.3 ist der Mittelwert $\langle x \rangle$ als Funktion von γ aufgetragen. Die numerischen Punkte sind mit der analytischen Lösung $A_0(2\gamma^2 - 1)$ angepaßt, wobei \tilde{c}_1 als Fitparameter verwendet wurde. Das Ergebnis der Anpassung $A_0 = 28.9756$ entspricht der analytischen Lösung des Integrales \tilde{c}_1 für $t = 100$, vgl. (5.25). Der Erwartungswert $\langle xy \rangle$ berechnet sich mit (5.68) zu:

$$\langle xy \rangle = \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2 2g\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi \quad (5.100)$$

Wie man sieht, ist dieser Erwartungswert abhängig von der Phase φ . In Abb. 5.4 ist die γ -Abhängigkeit von $\langle xy \rangle$ für verschiedene φ geplottet und mit der analytischen Lösung angepaßt. Die großen Werte des Mittelwertes ergeben sich aus der Entwicklung des Walks für große Zeiten.

Für $\gamma \in \{0, 1\}$ ist die Concurrence gleich 0, der Zustand unverschränkt. In diesem Fall entspricht $\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$. Für $\gamma \notin \{0, 1\}$ ist der Zustand verschränkt. In diesem Fall kann $\langle xy \rangle$ nicht mehr als Produkt der einzelnen Erwartungswerte $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ geschrieben werden. Die Korrelation wird durch die Kovarianz beschrieben und ist ebenfalls von φ abhängig:

$$\text{Cov}(x, y) = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) + \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi \quad (5.101)$$

Die γ -Abhängigkeit der Kovarianz ist in Abb. 5.5 für verschiedene Winkel φ dargestellt. Die analytischen Ergebnisse stimmen mit den Resultaten der numerischen Simulation perfekt überein. Die Kovarianz $\text{Cov}(x, y)$ ist ebenfalls für $\gamma \in \{0, 1\}$ gleich 0. Die Korrelation verschwindet also in diesem Fall für unverschränkte Zustände, vgl. auch die allgemeine Darstellung (5.96). Die Concurrence ist maximal für $\gamma = 1/\sqrt{2}$. Das Maximum der Kovarianz ist abhängig vom Phasenwinkel φ . Für $\varphi = \pi/2$ entspricht die Kovarianz der quadrierten Concurrence. Aber beispielsweise für $\varphi = 0$ liefert der \tilde{d}_1^2 Term einen endlichen Beitrag. Diese Phasensensitivität ist bei einer Diskussion der Verschränkungsabhängigkeit natürlich fehl am Platze. Die Concurrence, als Maß einer 2-Qubit Verschränkung ist phasenunabhängig. Größen, die die Parameterabhängigkeit der Concurrence widerspiegeln sollen, sollten folglich ebenfalls phasenunabhängig sein.

Es wird daher vorgeschlagen, die Phasenabhängigkeit durch eine Mittelung zu reduzieren, um auf ein Verschränkungsmaß zu kommen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Cov}(x, y) d\varphi = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) \quad (5.102)$$

Durch diese Mittelung über den gesamten Phasenbereich erhält man einen direkten Zusammenhang zwischen Kovarianz und quadrierter Concurrence. Diese Größe wäre natürlich auch experimentell zugänglicher, da eine direkte Kontrolle der Phase schwierig ist. Andererseits ist durch die Phasenabhängigkeit der Erwartungswerte, die Phase durch QW Experimente bestimmbar.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Betrachtung der folgenden Größe:

$$\overline{\text{Cov}(x, y)} := \langle |x - \langle x \rangle| |y - \langle y \rangle| \rangle \quad (5.103)$$

Ähnlich zur Kovarianz konstruiert, wird nun der Absolutbetrag der Abweichungen vom Mittelwert untersucht. In Abb. 5.6 ist die γ -Abhängigkeit dieser Größe für verschiedene

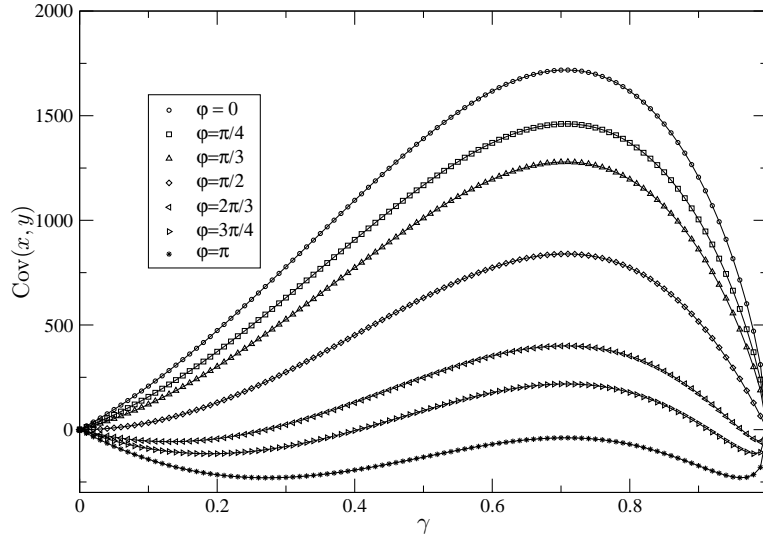


Abbildung 5.5: Kovarianz des Beispielszustandes (5.97) als Funktion von γ , für verschiedene Werte von φ . Die numerischen Punkte sind mit der analytischen Lösung $A_0 4\gamma^2(1 - \gamma^2) + A_1 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi$ angefitet, mit den jeweiligen Ergebnissen $A_0 = 839.583$ und $A_1 = 878.688$. Die numerische Simulation des QW wurde mit $g = 220$ und $t = 100$ durchgeführt.

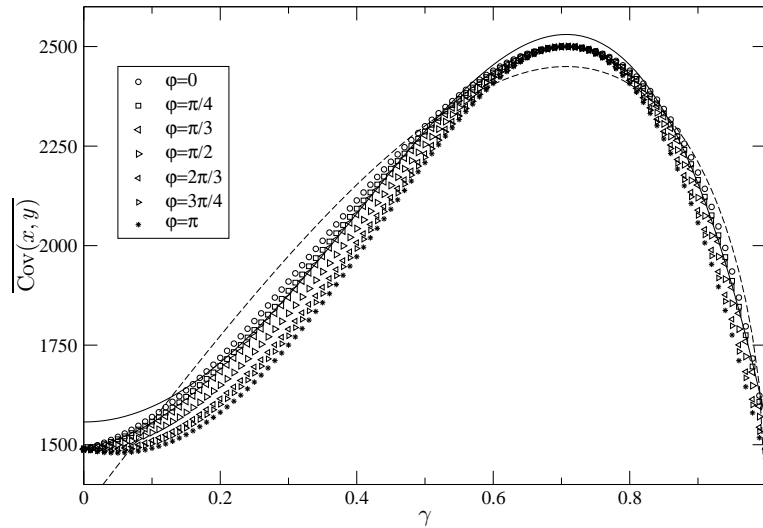


Abbildung 5.6: $\overline{\text{Cov}(x, y)}$ des Beispielszustandes (5.97) als Funktion von γ , für verschiedene Werte von φ . Die numerischen Ergebnisse für $\varphi = 0$ wurden einerseits mit der Gleichung für die Concurrence (gestrichelte Linie) und andererseits mit der quadrierten Concurrence (durchgezogene Linie) angepaßt. Numerische Simulation des QW mit $g = 220$ und $t = 100$.

φ aufgetragen. Die Phasenabhängigkeit wird gedämpft. Die numerischen Punkte aus der Simulation für $\varphi = 0$ sind mit den Gleichungen, sowohl für die Concurrences, als auch die quadrierte Concurrence angefitet. Beide Gleichungen reichen nicht aus um die Parameterabhängigkeit von $\overline{\text{Cov}}(x, y)$ zu beschreiben. Trotzdem wird im direkten Vergleich eine verbesserte Beschreibung der Verschränkung erzielt.

5.2.5 Diskussion

Die Verschränkungsstruktur eines 2-Qubit Zustandes kann also mittels Ortserwartungswerten eines QW verstanden werden. Die Betrachtung der eindimensionalen Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ liefert einen Zusammenhang mit der I-Concurrence. Diese entspricht im 2-Qubit Fall der Concurrence, dem Maß einer 2-Qubit Verschränkung. Hat man Zustände in der Bell Form vorliegen, so reichen die $\langle x_i \rangle$ alleine aus, da die Restterme gleich Null sind. Weiterhin kann die Verschränkung mittels Kovarianz analysiert werden. Ein Phänomen, welches dabei besonders zu berücksichtigen ist, ist eine Phasensensitivität der zweidimensionalen Erwartungswerte $\langle x_i x_j \rangle$ und folglich der Kovarianz. Eine Chance den Phaseneinfluß zu reduzieren, besteht aus einer gemittelten Betrachtung aller möglichen Phaseneinstellungen.

5.3 Dreidimensionaler QW

In diesem Unterabschnitt wird der Einfluß eines 3-Qubit Coin Startzustandes $|\phi_0\rangle$ auf die Ausbreitung eines dreidimensionalen QW untersucht. Ein allgemeiner Coin Startzustand kann in der Standardbasis wie folgt dargestellt werden:

$$|\phi_0\rangle = \sum_{i=1}^8 \alpha_i |i\rangle \quad (5.104)$$

Ähnlich wie im 2-Qubit Fall werden nun die Erwartungswerte bezüglich ihrer Aussagekraft über die Charakterisierung möglicher Verschränkungsstrukturen untersucht. Im 3-Qubit Fall gibt es zwei Arten von Verschränkung, die zur Charakterisierung unterschieden werden. Eine echte 3-Qubit Verschränkung, welche mit dem Tangle meßbar ist und eine 2-Qubit Verschränkung, die durch die jeweiligen 2-Qubit Concurrences charakterisiert wird. Diese beiden Arten der Verschränkung spiegeln sich auch in der Struktur der Verschränkungsklassen wieder. Wie bereits diskutiert, werden die GHZ-Klasse und die W-Klasse unterschieden. In die GHZ-Klasse fallen Zustände mit einem von Null verschiedenen Tangle. Der Prototypzustand der GHZ-Klasse ist der GHZ-Zustand, der der W-Klasse der W-Zustand. Die betrachteten Beispielszustände orientieren sich an dieser Klassifizierung.

5.3.1 Berechnung der Erwartungswerte

5.3.1.1 1D Mittelwerte und I-Concurrence

Die Berechnung der Erwartungswerte erfolgt wie im zweidimensionalen Fall durch eine Erweiterung der Beziehung nach Brun et al. [25]. Die Berechnung des eindimensionalen Erwartungswertes $\langle x_1 \rangle$ erfordert eine Auswertung des Integrals:

$$\langle x_1 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle, \quad (5.105)$$

wobei $\tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)}$ in (5.53) definiert ist. Durch Ausnutzen der abgeleiteten Lemmas (1) und (2) erhält man:

$$\begin{aligned} \langle x_1 \rangle = \tilde{c}_1 \Big\{ & |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 \Big\} + \\ & \tilde{d}_1 \Big\{ \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1^* \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2^* \alpha_6 + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_3^* \alpha_7 + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_4^* \alpha_8 \Big\} \end{aligned} \quad (5.106)$$

Die Berechnung der Mittelwerte $\langle x_2 \rangle$ bzw. $\langle x_3 \rangle$ erfolgt analog. Man benutzt die Integranden:

$$\langle x_2 \rangle \longrightarrow \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.107)$$

$$\langle x_3 \rangle \longrightarrow \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.108)$$

und faßt die Ergebnisse entsprechend zusammen. Die genaue Darstellung der Mittelwerte in Abhängigkeit der α_i befindet sich in Anhang B.

Die Berechnung des Zusammenhanges zwischen Mittelwerten und I-Concurrences erfolgt wie im zweidimensionalen QW. Die reduzierte Dichtematrix ρ_1 erhält man mit einer partiellen Spurbildung der Gesamtdichtematrix $\rho_{123} = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$, $\rho_1 = \text{tr}_{23} \rho_{123}$. Die Elemente von ρ_1 werden mit $R_{ij}^{(1)} := (\rho_1)_{ij}$ abgekürzt:

$$R_{11}^{(1)} = \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 \right\} \quad (5.109)$$

$$R_{12}^{(1)} = \left\{ \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_4 \alpha_8^* \right\} \quad (5.110)$$

$$R_{21}^{(1)} = \left\{ \alpha_1^* \alpha_5 + \alpha_2^* \alpha_6 + \alpha_3^* \alpha_7 + \alpha_4^* \alpha_8 \right\} \quad (5.111)$$

$$R_{22}^{(1)} = \left\{ |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 \right\}. \quad (5.112)$$

Da die Strukturen die gleiche Form wie im zweidimensionalen Fall haben, sowohl die Spur über ρ_1^2 :

$$\text{tr}(\rho_1^2) = (R_{11}^{(1)})^2 + (R_{22}^{(1)})^2 + 2R_{12}^{(1)}R_{21}^{(1)}, \quad (5.113)$$

als auch der Mittelwert:

$$\langle x_1 \rangle = \tilde{c}_1 \left\{ R_{11}^{(1)} - R_{22}^{(1)} \right\} + \tilde{d}_1 \left\{ R_{12}^{(1)} + R_{21}^{(1)} \right\}, \quad (5.114)$$

erhält man den gewünschten Zusammenhang:

$$\langle x_1 \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_{1-23}^2) + \text{Rest}_{x_1} \right\}. \quad (5.115)$$

Hierbei wurde wieder die Annahme benutzt, daß t groß ist, damit \tilde{c}_1 und \tilde{d}_1 gleichgesetzt werden können. Die Ableitung kann ebenfalls für $\langle x_2 \rangle$ und $\langle x_3 \rangle$ durchgeführt werden. Man kann als allgemeines Ergebnis für den asymptotischen Grenzfall großer Zeiten festhalten:

$$\langle x_i \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_i^2) + \text{Rest}_{x_i} \right\}. \quad (5.116)$$

Der quadratische Mittelwert $\langle x_i \rangle$ ist proportional zur Differenz $1 - IC_i^2$, wobei ein noch zu diskutierender Term Rest_{x_i} übrigbleibt. Für verallgemeinerte GHZ- und W-Zustände verschwindet dieser Restterm. Ebenso bei den weiter unten besprochenen Beispielen. Es lassen sich natürlich Zustände mit Resttermen ungleich Null konstruieren. Ob diese Zustände bestimmte Gemeinsamkeiten aufweisen, muß noch geklärt werden.

5.3.1.2 2D & 3D Mittelwerte

Die Berechnung der höheren Mittelwerte in Abhängigkeit der α_i erfolgt nach dem gleichen Schema. Erst die Auswertung des Integrals:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{i^2}{(2\pi)^3} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle, \quad (5.117)$$

dann das Zusammenziehen der Terme mittels Hilfssätzen:

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 \right\} + \\ & \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_1^* \alpha_7 + \alpha_2 \alpha_8^* + \alpha_2^* \alpha_8 + \alpha_3 \alpha_5^* + \alpha_3^* \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_6^* + \alpha_4^* \alpha_6 \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1^* \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1^* \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2^* \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2^* \alpha_6 - \right. \\ & \left. \alpha_3 \alpha_7^* - \alpha_3^* \alpha_7 - \alpha_5 \alpha_8^* - \alpha_5^* \alpha_8 - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_4^* \alpha_8 - \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_6^* \alpha_8 \right\}. \quad (5.118) \end{aligned}$$

Die weiteren Mittelwerte $\langle x_1 x_3 \rangle$ und $\langle x_2 x_3 \rangle$ berechnen sich mit den Integranden:

$$\langle x_1 x_3 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.119)$$

$$\langle x_2 x_3 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.120)$$

Die genaue Darstellung befindet sich in Anhang B.

Betrachtet man die auf zwei Qubits reduzierte Dichtematrix $\rho_{12} = \text{tr}_3 \rho_{123}$ und kürzt die Elemente dieser mit $R_{ij}^{(12)} := (\rho_{12})_{ij}$ ab, so kann man den Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ als Funktion dieser Elemente schreiben:

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ R_{11}^{(12)} - R_{22}^{(12)} - R_{33}^{(12)} + R_{44}^{(12)} \right\} + \tilde{d}_1^2 \left\{ R_{14}^{(12)} + R_{41}^{(12)} + R_{23}^{(12)} + R_{32}^{(12)} \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ R_{12}^{(12)} + R_{21}^{(12)} + R_{13}^{(12)} + R_{31}^{(12)} - R_{24}^{(12)} - R_{42}^{(12)} - R_{34}^{(12)} - R_{43}^{(12)} \right\}. \quad (5.121) \end{aligned}$$

Wie im Fall der eindimensionalen Mittelwerte ist also eine Darstellung als Funktion der Elemente der reduzierten Dichtematrix möglich. Die Darstellung der anderen beiden Mittelwerte hat ebenfalls die gleiche Struktur.

Vergleicht man diese Struktur mit der Darstellung durch Spinkorrelationen aus der Arbeit von Glaser et al. [50], so ergibt sich wieder eine Übereinstimmung. Betrachtet man nur den \tilde{c}_1^2 Anteil, also die Addition/Subtraktion der Diagonalelemente, so erhält man in Termen der Spinkorrelationen einen Zusammenhang mit einer σ_z Zweipunkt Korrelation:

$$\langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle = R_{11}^{(ij)} - R_{22}^{(ij)} - R_{33}^{(ij)} + R_{44}^{(ij)}. \quad (5.122)$$

Die Berechnung des dreidimensionalen Erwartungswertes liefert:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \frac{i^3}{(2\pi)^3} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.123)$$

und die Darstellung in Abhängigkeit der α_i des Coin Startzustandes:

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^3 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 \right\} + \\ & \tilde{d}_1^3 \left\{ (\alpha_1 \alpha_8^* + \alpha_2 \alpha_7^* + \alpha_3 \alpha_6^* + \alpha_4 \alpha_5^*) + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 \left\{ (\alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_5^*) - \right. \\ & \left. (\alpha_2 \alpha_8^* + \alpha_3 \alpha_8^* + \alpha_4 \alpha_6^* + \alpha_4 \alpha_7^* + \alpha_5 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_7^*) + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1 \left\{ (\alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_7 \alpha_8^*) - \right. \\ & \left. (\alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5 \alpha_7^*) + c.c. \right\}. \quad (5.124) \end{aligned}$$

Hierbei entspricht $c.c.$ dem konjugiert komplexen Anteil der jeweiligen Elemente pro geschweifter Klammer.

5.3.2 Betrachtung der Beispielszustände

Im folgenden werden die Ortserwartungswerte für bestimmte Coin Startzustände berechnet, die beispielhaft für die Klassenstruktur der 3-Qubit Zustände gewählt wurden und somit allgemeinen Charakter haben.

5.3.2.1 Parameterabhängige GHZ Zustände

2-Qubit Verschränkung: Zur Vereinfachung kann man einen 3-Qubit Zustand konstruieren, der nur eine Verschränkung zwischen Qubit 1 und Qubit 2 enthält:

$$\gamma|000\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|110\rangle = \left(\gamma|00\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|11\rangle \right) \otimes |0\rangle, \quad (5.125)$$

mit $\gamma \in [0, 1]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Mit der Concurrence C_{12} zwischen Qubit 1 und 2, sowie den I-Concurrences IC_1 und IC_2 , ist es möglich diese Verschränkung zu messen:

$$C_{12} = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \quad IC_1 = IC_2 = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}. \quad (5.126)$$

Die Concurrence zwischen den anderen Qubit Paaren ist Null, $C_{23} = C_{13} = 0$, ebenso die I-Concurrence $IC_3 = 0$. Die Auswertung der Mittelwerte liefert folgende Ergebnisse:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \tilde{c}_1(2\gamma^2 - 1) \quad (5.127)$$

$$\langle x_3 \rangle = \tilde{c}_1 \quad (5.128)$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.129)$$

$$\langle x_1 x_3 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2(2\gamma^2 - 1) \quad (5.130)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^3 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.131)$$

Die eindimensionalen Mittelwerte $\langle x_1 \rangle$ und $\langle x_2 \rangle$ sind proportional zu den jeweiligen I-Concurrences, es gilt der Zusammenhang (5.116). Der Mittelwert bezogen auf die x_3 -Richtung, also das dritte Qubit, $\langle x_3 \rangle$, ist unabhängig vom Startzustand und liefert einen konstanten Beitrag. Die Betrachtung der zweidimensionalen Erwartungswerte liefert ebenfalls Hinweise auf die Verschränkungsstruktur. Die Mittelwerte $\langle x_1 x_3 \rangle$ sowie $\langle x_2 x_3 \rangle$ können als Produkt der eindimensionalen Mittelwerte geschrieben werden:

$$\langle x_1 x_3 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_3 \rangle \quad \langle x_2 x_3 \rangle = \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle, \quad (5.132)$$

die dazugehörigen Kovarianzen sind folglich Null:

$$\text{Cov}(x_1, x_3) = \text{Cov}(x_2, x_3) = 0. \quad (5.133)$$

Zwischen den Richtungen x_1 und x_3 , sowie zwischen x_2 und x_3 , existiert also keine Korrelation. Dies stimmt mit der Verschränkungsstruktur überein. Die Betrachtung der Kovarianz zwischen Richtung x_1 und x_2 liefert eine parameterabhängige Struktur:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) + \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi \quad (5.134)$$

Diese Struktur ist gleich der Kovarianz des betrachteten 2-Qubit Beispielzustandes, vgl. (5.101). Die Phasenabhängigkeit läßt sich durch Mittelung über alle Phaseinstellungen wegdiskutieren:

$$\langle \text{Cov}(x_1, x_2) \rangle_\varphi = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) \quad (5.135)$$

Die Kovarianz zwischen x_1 und x_2 ist proportional zur quadrierten Concurrence zwischen Qubit 1 und Qubit 2.

Der dreidimensionale Mittelwert liefert keine weitere Information, da er als Produkt aus niederdimensionalen Erwartungswerten zusammengesetzt werden kann:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \quad (5.136)$$

Allein aus der Produktstruktur der Erwartungswerte läßt sich die Verschränkungsstruktur des Zustandes ableiten. Desweiteren kann sowohl mit der gemittelten Kovarianz als auch den eindimensionalen Mittelwerten die Verschränkung gemessen werden.

3-Qubit Verschränkung: Der GHZ-Zustand ist der Prototyp Zustand der GHZ-Klasse:

$$|\phi_0\rangle = \gamma|000\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1 - \gamma^2}|111\rangle \quad (5.137)$$

Im gesamten Bereich $\gamma \in]0, 1[$ ist der Zustand 3-Qubit verschränkt, mit einem Tangle ungleich Null, $\tau = 4\gamma^2(1 - \gamma^2)$. Der Zustand enthält keine 2-Qubit Verschränkung, die Concurrences sind Null (vgl. Anhang A). Die Mittelwerte berechnen sich mit den oben angegebenen allgemeinen Gleichungen zu:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \langle x_3 \rangle = \tilde{c}_1(2\gamma^2 - 1) \quad (5.138)$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 x_3 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2 \quad (5.139)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^3(2\gamma^2 - 1) + \tilde{d}_1^3 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi \quad (5.140)$$

Die eindimensionalen Mittelwerte sind gleich und entsprechen nach Zusammenhang (5.116) den jeweiligen I-Concurrences. Die Restterme sind für diesen Zustand gleich Null. Die zweidimensionalen Erwartungswerte $\langle x_i x_j \rangle$ sind nicht parameterabhängig und entsprechen der Konstanten \tilde{c}_1^2 , die nur durch den QW bestimmt wird. Dies könnte auf einen Zusammenhang mit den Concurrences hindeuten, die jeweils gleich Null sind. Eine mögliche Korrelation kann durch Berechnung der Kovarianz bestimmt werden:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) \quad (5.141)$$

Dies entspricht $\langle x_i x_j \rangle \neq \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$. Die Kovarianz ist unabhängig vom Phasenwinkel φ und ist in der Form dem Tangle bzw. dem Global Entanglement, vgl (2.39) gleich. Ein direkter Zusammenhang zwischen Kovarianz auf der einen Seite und Concurrence auf der anderen

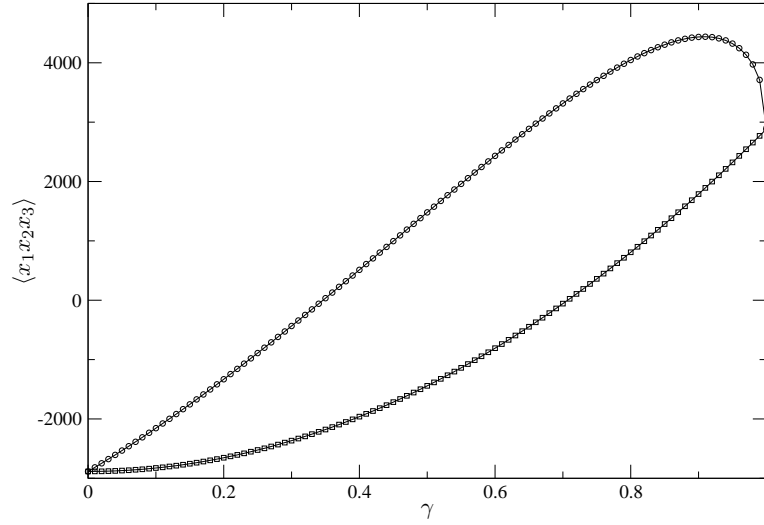


Abbildung 5.7: Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ als Funktion von γ für zwei verschiedene Phasenwinkel φ , $\varphi = 0$ (Kreise) und $\varphi = \pi/2$ (Quadrate) für den parameterabhängigen GHZ-Zustand (5.137). Die durchgezogenen Linien sind Anpassungen der numerischen Punkte mit der analytischen Gleichung (5.140). $A_0(2\gamma^2 - 1) + A_1 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi$ und den Ergebnissen $A_0 = 2884.5$ und $A_1 = 3374.18$. Die Werte des QW sind $g = 110$ und $t = 55$.

ist folglich nicht gegeben. Die 3-Qubit Verschränkung bewirkt also auch eine Zweier Korrelation der Raumrichtungen.

Im Gegensatz zum vorher betrachteten 2-Qubit verschränkten Zustand, kann der dreidimensionale Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ nicht als Produkt niederdimensionaler Erwartungswerte geschrieben werden:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle \neq \langle x_i x_j \rangle \langle x_k \rangle \quad (5.142)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle \neq \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle. \quad (5.143)$$

Der Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ besteht aus zwei Teilen. Sowohl der \tilde{c}_1 , als auch der \tilde{d}_1 Anteil geben Hinweise auf einen möglichen Zusammenhang mit Verschränkungsmaßen. Der \tilde{d}_1 Anteil kann aber bei einer Mittelung über die Phasenwinkel vernachlässigt werden. In Abb. 5.7 ist $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ als Funktion von γ für zwei verschiedene Winkel φ dargestellt. Die numerischen Punkte sind mit der analytischen Lösung angepaßt. Eine Korrelation zwischen drei klassischen Zufallsvariablen wird in der gängigen Literatur nicht diskutiert. Deswegen wird ähnlich zum Quantenfall versucht eine Art Dreier Korrelation / Kovarianz abzuleiten. Die Gesamtverschränkung eines 3-Qubit Zustandes kann als Summe der 2-Qubit Verschränkungen und der 3-Qubit Verschränkung geschrieben werden, vgl. (2.16). Ein ähnlicher Gedanke steckt hinter der folgenden Berechnung. Die Kovarianz ist ursprünglich definiert als:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle. \quad (5.144)$$

Untersucht man nun eine Größe ähnlich zur Kovarianz, so erhält man:

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle &= \\ \langle x_1 x_2 x_3 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle - \langle x_1 \rangle \text{Cov}(x_2, x_3) - \langle x_2 \rangle \text{Cov}(x_1, x_3) - \langle x_3 \rangle \text{Cov}(x_1, x_2) &= \\ = \tilde{c}_1^3 2(2\gamma^2 - 1)4\gamma^2(1 - \gamma^2) + \tilde{d}_1^3 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Vom dreidimensionalen Mittelwert werden die Kovarianzen und das Produkt der eindimensionalen Mittelwerte abgezogen, wobei die Kovarianzen mit den eindimensionalen Mittelwerten gewichtet werden. Das Ergebnis liefert aber nicht den gewünschten Zusammenhang. Auch nach einer Mittelung über die Phasenwinkel, wäre diese Größe beispielsweise nicht proportional zum Tangle, da für $\gamma = 1/\sqrt{2}$ der komplette Term gleich Null ist, obwohl bei diesem Wert die Verschränkung maximal wäre.

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen. Eine direkte Abbildung der Verschränkung auf die Kovarianzen ist nicht gegeben. Im Gegensatz zum diskutierten 2-Qubit Beispielszustand (5.97), ist für den 3-Qubit GHZ-Zustand die Kovarianz proportional zum Tangle bzw. zur Globalverschränkung Q . Einen Hinweis auf eine nicht vorhandene 2-Qubit Verschränkung, die Concurrences sind 0, geben die zweidimensionalen Mittelwerte $\langle x_i x_j \rangle$, welche für den gesamten Parameterbereich konstant und nicht parameterabhängig sind.

5.3.2.2 Verallgemeinerter W-Zustand $|\psi_6\rangle$

Ein etwas komplizierterer Zustand, von der Parameterabhängigkeit her gesehen, ist der bereits diskutierte Zustand (vgl. Anhang A):

$$|\psi_6\rangle = \kappa_1|001\rangle + \kappa_2|010\rangle + \kappa_1|100\rangle \quad (5.146)$$

mit der Normierung $2\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$, mit

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{\chi}}{2\sqrt{\eta}} \quad \kappa_2 = -\frac{2}{\sqrt{\chi}\sqrt{\eta}} \quad (5.147)$$

und

$$\eta = \sqrt{12 + \Delta(\Delta - 4)} \quad \chi = \eta + \Delta - 2. \quad (5.148)$$

Der Zustand ist Eigenzustand einer speziellen Heisenberg Spinkette, mit einer Anisotropie Δ . In Abhängigkeit dieses Parameters Δ werden die Verschränkungsmaße bzw. die Orts-erwartungswerte diskutiert.

Der Zustand hat kein Tangle, $\tau_{123} = 0$, gehört folglich nicht zur GHZ-Klasse. Die jeweiligen Concurrences sind aber von Null verschieden:

$$C_{12} = C_{23} = \frac{2}{\eta} \quad C_{13} = \frac{4}{\eta(\eta - \Delta + 2)}, \quad (5.149)$$

der Zustand gehört somit in die W-Klasse. Die Gesamtverschränkung Q ist nach (2.16) somit nur eine Funktion der quadrierten Concurrences. Für $\Delta \rightarrow \infty$ kann der Zustand als Produkt von Qubit 1 und 3 mit Qubit 2 geschrieben werden:

$$|\psi_6\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |100\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{13} + |10\rangle_{13}) \otimes |0\rangle_2 \quad (5.150)$$

In diesem Fall gehen C_{12} und C_{23} gegen 0, C_{13} wird maximal. Für den speziellen Wert $\Delta = 3$ hat der Zustand W-Form (2.31) und die Concurrences sind alle gleich. Die Diskussion dreht sich im folgenden um diese beiden Spezialfälle.

Die Berechnung der Mittelwerte für einen dreidimensionalen QW mit $|\psi_6\rangle$ als Coin Start-

zustand liefert:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_3 \rangle = \tilde{c}_1 \kappa_2^2 \quad (5.151)$$

$$\langle x_2 \rangle = \tilde{c}_1 (2\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \quad (5.152)$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle = -\tilde{c}_1^2 \kappa_2^2 + \tilde{d}_1^2 2\kappa_1 \kappa_2 \quad (5.153)$$

$$\langle x_1 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2 (-2\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \tilde{d}_1^2 2\kappa_1^2 \quad (5.154)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = -\tilde{c}_1^3 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2(\kappa_1^2 + 2\kappa_1 \kappa_2) \quad (5.155)$$

Die folgenden Fragen stellen sich bei Betrachtung der Erwartungswerte des Zustandes $|\psi_6\rangle$:

- Kann die Struktur der Verteilung der 2-Qubit Verschränkungen herausgearbeitet werden?
- Ist es möglich eine nicht vorhandene 3-Qubit Verschränkung zu erkennen?
- Können die jeweiligen Verschränkungen mit den Erwartungswerten gemessen werden?

Die eindimensionalen Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ sind nach Gleichung (5.116) proportional zur jeweiligen quadrierten I-Concurrence IC_i^2 , mit:

$$IC_{1-23}^2 = IC_{3-12}^2 = \frac{\eta(\eta + \Delta - 2) + 4}{\eta} \quad IC_{2-13}^2 = \frac{8}{\eta^2}. \quad (5.156)$$

Die Restterme Rest_{x_i} sind gleich Null. Durch die Angabe der I-Concurrences ist somit die Globalverschränkung Q berechenbar, vgl. (2.15). In Abb. 5.8 sind die Mittelwerte als Funktion von Δ dargestellt und die numerische Simulation mit der analytischen Lösung verglichen. Abb. 5.9 veranschaulicht die höheren Erwartungswerte sowie die Kovarianzen als Funktion von Δ .

Die Concurrence Struktur ist einerseits an den zweidimensionalen Mittelwerten, andererseits an den Kovarianzen erkennbar:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_2, x_3) = -\tilde{c}_1^2 2\kappa_2^2 (1 - \kappa_2^2) + \tilde{d}_1^2 2\kappa_1 \kappa_2 \quad (5.157)$$

$$\text{Cov}(x_1, x_3) = -\tilde{c}_1^2 (1 - 2\kappa_2^2) + \tilde{d}_1^2 (1 - \kappa_2^2) \quad (5.158)$$

Die Gleichheit zweier Concurrences spiegelt sich in der Gleichheit der Kovarianzen bzw. der zweidimensionalen Erwartungswerte wieder:

$$C_{12} = C_{23} \iff \langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle \quad (5.159)$$

$$C_{12} = C_{23} \iff \text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_2, x_3) \quad (5.160)$$

Unter Beachtung der Vorzeichen lassen sich die Concurrences als Funktion der κ_i schreiben:

$$C_{12} = C_{23} = -2\kappa_1 \kappa_2 \quad C_{13} = 2\kappa_1^2 \quad (5.161)$$

und somit die Kovarianzen als Funktion der Concurrences darstellen:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = -\tilde{c}_1^2 (C_{12}^2 + C_{12}) \quad (5.162)$$

$$\text{Cov}(x_1, x_3) = -\tilde{c}_1^2 (C_{13}^2 - C_{13}) \quad (5.163)$$

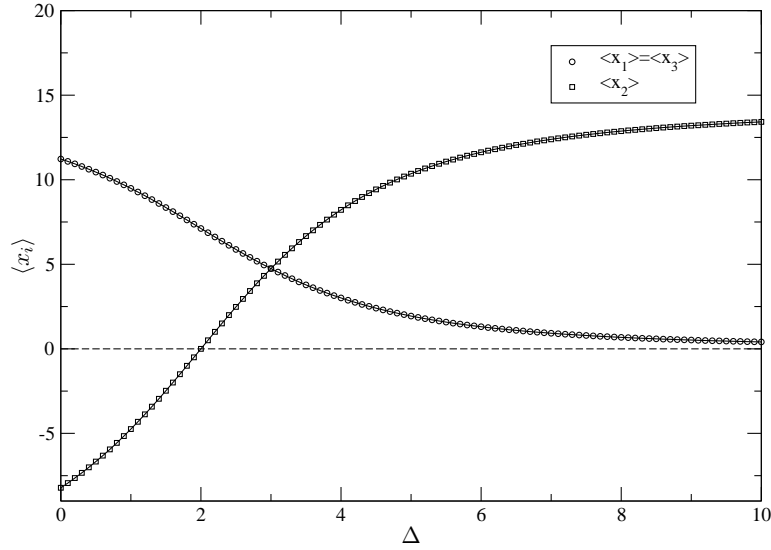


Abbildung 5.8: Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ des Zustandes $|\psi_6\rangle$ als Funktion von Δ . Die numerischen Punkte sind mit der jeweiligen analytischen Lösung angepaßt, wobei \tilde{c}_1 als Fitparameter angenommen wurde. Das Ergebnis $A_0 = 14.235$ stimmt für die numerischen Werte mit der analytischen Rechnung überein. Der QW wurde mit $g = 110$ und $t = 55$ simuliert.

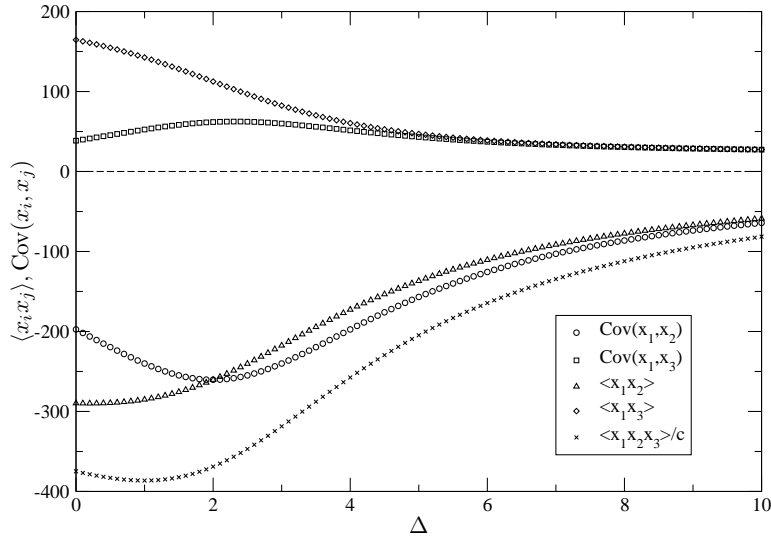


Abbildung 5.9: Kovarianzen und höherdimensionale Erwartungswerte des Zustandes $|\psi_6\rangle$ als Funktion von Δ . Der QW wurde mit $g = 110$ und $t = 55$ simuliert.

wobei der Limes großer Zeiten angenommen wurde. Ebenso läßt sich der dreidimensionale Erwartungswert als Funktion der Concurrences schreiben:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = -\tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 (C_{13} - 2C_{12}) \quad (5.164)$$

Mit einer künstlichen Aufspaltung, da $C_{12} = C_{23}$, erhält man eine Darstellung von $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ als Funktion aller Concurrences:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = -\tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 (C_{13} - C_{12} - C_{23}) \quad (5.165)$$

Betrachtet man nun den Spezialfall großer Δ , d.h. $\kappa_1 \rightarrow 1/\sqrt{2}$ und $\kappa_2 \rightarrow 0$, so verschwinden die Concurrences zwischen den Qubits 1 und 2 und zwischen den Qubits 2 und 3, $C_{12} = C_{23} \rightarrow 0$. Dieses Verhalten kann man an den Erwartungswerten bzw. Kovarianzen ebenfalls beobachten:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle \rightarrow 0, \quad \text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_2, x_3) \rightarrow 0 \quad (5.166)$$

Die Concurrence C_{13} wird aber maximal. Der dazugehörige Erwartungswert bzw. die Kovarianz zeigen aber nicht dieses Verhalten:

$$\langle x_1 x_3 \rangle \rightarrow -\tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2, \quad \text{Cov}(x_1, x_3) \rightarrow -\tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2 \quad (5.167)$$

Die Summe $-\tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2$ würde im Limes großer Zeiten gegen 0 gehen. Ein minimaler Unterschied zu den beiden anderen Kovarianzen wäre dennoch erkennbar.

Für diesen Zustand läßt sich zusammenfassend folgendes sagen:

- Die vorhandene Struktur der 2-Qubit Verschränkungen kann herausgearbeitet werden, die Kovarianzen lassen sich in Termen der Concurrences schreiben. Man kann die Verschränkung aber nicht mit den Kovarianzen alleine messen, da sich C_{13} und $\text{Cov}(x_1, x_3)$ reziprok verhalten.
- Der dreidimensionale Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ läßt sich ebenfalls als alleinige Funktion der Concurrences darstellen. Man kann also eine 3-Qubit Verschränkung ausschließen.
- Mit den Ortskorrelationsfunktionen läßt sich die Verschränkung quantitativ bestimmen.

5.3.2.3 Superpositionszustand $|\psi_{78}\rangle$

Der Zustand $|\psi_{78}\rangle$ ergibt sich aus der Superposition zweier Eigenzustände der bereits angesprochenen Heisenbergkette (vgl. Anhang A):

$$|\psi_{78}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\zeta_1 |001\rangle + \zeta_2 |010\rangle + \zeta_1 |011\rangle + \zeta_1 |100\rangle + \zeta_2 |101\rangle + \zeta_1 |110\rangle \right), \quad (5.168)$$

mit

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}\sqrt{\chi}} \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{2}\sqrt{\eta}} \quad (5.169)$$

und χ und η in (5.148). Der Zustand hat bis auf $\Delta = 3$ ein Tangle ungleich Null, gehört also der GHZ-Klasse an. Im Limes $\Delta \rightarrow \infty$ hat der Zustand GHZ-Form:

$$|\psi_{78}\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|010\rangle + |101\rangle \right), \quad (5.170)$$

mit $\zeta_1 \rightarrow 0$ und $\zeta_2 \rightarrow 1$. Die Concurrences C_{12} und C_{23} sind gleich und verschieden von C_{13} . Die genaue Darstellung der Concurrences als Funktion von Δ ist kompliziert. (Eine explizite Diskussion der Verschränkung des Zustandes befindet sich in Anhang A.) Es ist aber möglich das Tangle mit der Hyperdeterminanten zu berechnen und somit als Funktion der ζ_i zu schreiben:

$$\tau(|\psi_{78}\rangle) = |\zeta_2^4 - 4\zeta_1^2\zeta_2^2|. \quad (5.171)$$

Die Frage, die sich bei Betrachtung der Erwartungswerte dieses Zustandes stellt, ist die nach der 3-Qubit Verschränkung. Ist es möglich, aus den vorhandenen Erwartungswerten die Form des Tangles abzuleiten? Wie bei der obigen Diskussion des Zustandes $|\psi_6\rangle$ gesehen, steckt die Information über die Verschränkung sowohl in den zweidimensionalen Erwartungswerten bzw. den Kovarianzen als auch im dreidimensionalen Erwartungswert. Eine Kombination dieser müßte also den Parameterverlauf des Tangles liefern.

Die Berechnung der Ortserwartungswerte des QW mit $|\psi_{78}\rangle$ als Coin Startzustand ergibt:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_3 \rangle = \tilde{d}_1^2 2\zeta_1\zeta_2 \quad (5.172)$$

$$\langle x_2 \rangle = \tilde{d}_1^2 2\zeta_1^2 \quad (5.173)$$

$$\langle x_1x_2 \rangle = \langle x_2x_3 \rangle = -\tilde{c}_1^2\zeta_2^2 + \tilde{d}_1^2 2\zeta_1\zeta_2 \quad (5.174)$$

$$\langle x_1x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2(-2\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + \tilde{d}_1^2 2\zeta_1^2 \quad (5.175)$$

$$\langle x_1x_2x_3 \rangle = -\tilde{d}_1^3(2\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - \tilde{c}_1^2\tilde{d}_1^2(\zeta_1^2 + 2\zeta_1\zeta_2). \quad (5.176)$$

Mit der Darstellung der quadrierten I-Concurrences als Funktion der ζ_i :

$$IC_{1-23}^2 = IC_{3-12}^2 = 1 - \frac{4}{\eta^2} = 1 - (2\zeta_1\zeta_2)^2 \quad (5.177)$$

$$IC_{2-13}^2 = 1 - \frac{16}{\eta^2\chi^2} = 1 - 4\zeta_1^2, \quad (5.178)$$

kann man den Zusammenhang (5.116) leicht nachvollziehen. Die Restterme Rest_{x_i} sind gleich Null. Die Berechnung der Kovarianzen liefert:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_2, x_3) = -\tilde{c}_1^2\zeta_2^2 + \tilde{d}_1^2 2\zeta_1\zeta_2(1 - 2\zeta_1^2) \quad (5.179)$$

$$\text{Cov}(x_1, x_3) = \tilde{c}_1^2(-2\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + \tilde{d}_1^2 2\zeta_1^2(1 - 2\zeta_2^2). \quad (5.180)$$

In Abb. 5.10 sind die zwei- und dreidimensionalen Erwartungswerte sowie die Kovarianzen als Funktion von Δ aufgetragen. Da die direkte Darstellung der Concurrences kompliziert ist, wird der Einfachheit halber, die Beziehung zu den Kovarianzen nur graphisch verglichen. Die Concurrences C_{ij} zeigen mehrere markante Punkte, vgl. Abb. A.1 in Anhang A. Für $\Delta = 2$ ist C_{13} gleich Null. Bei $\Delta = 3$ hat C_{13} ein Maximum und geht mit $\Delta \rightarrow \infty$ gegen Null. C_{12} bzw. C_{23} zeigen ebenfalls ein Maximum bei $\Delta = 3$ und werden im Limes $\Delta \rightarrow \infty$ ebenso Null. Für $\Delta = 1$ sind alle Concurrences gleich. Die Kovarianzen $\text{Cov}(x_1, x_2)$ und $\text{Cov}(x_2, x_3)$ sind gleich, verschieden von $\text{Cov}(x_1, x_3)$. Nur das Minimum bei $\Delta = 2$ erkennt man bei $|\text{Cov}(x_1, x_3)|$. Alle anderen Eigenschaften der Concurrences werden nicht durch die Kovarianzen wiedergegeben.

Der Zustand enthält neben den 2-Qubit Verschränkungen, eine durch das Tangle charakterisierte 3-Qubit Verschränkung. Wie am Beispiel des GHZ-Zustandes gesehen, kann die Information über die 3-Qubit Verschränkung in den Kovarianzen stecken. Zieht man weiterhin die Ergebnisse der Diskussion des Zustandes $|\psi_6\rangle$ in Betracht, so ist die Information einer 2-Qubit Verschränkung, sowohl in den zwei-, als auch in den dreidimensionalen

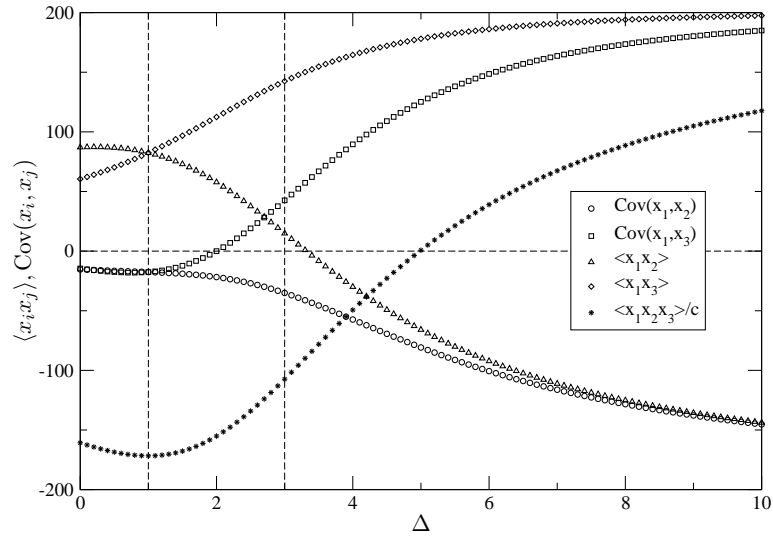


Abbildung 5.10: Kovarianzen und höhere Erwartungswerte des Zustandes $|\psi_{78}\rangle$ als Funktion von Δ . Der dreidimensionale Mittelwert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ ist mit $1/\tilde{c}_1$ skaliert. Der QW wurde mit $g = 110$ und $t = 55$ simuliert. Die gestrichelten senkrechten Linien markieren die speziellen Punkte bei $\Delta = 1$ bzw. $\Delta = 3$.

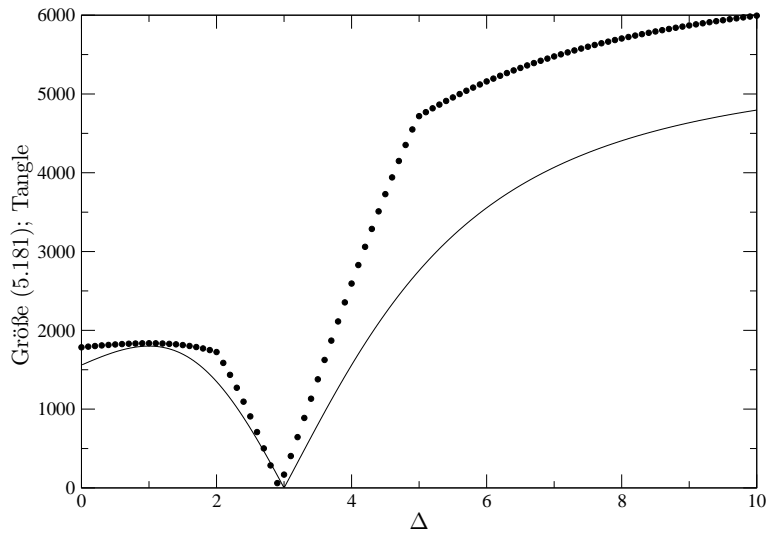


Abbildung 5.11: Vergleich der Größe (5.181) (Punkte) und des mit einem Faktoren \tilde{c}_1 hochskalierten Tangle τ für den Zustand $|\psi_{78}\rangle$ als Funktion von Δ . Der QW wurde mit $g = 110$ und $t = 55$ numerisch simuliert.

Erwartungswerten enthalten. Um also das Tangle abzubilden, ist ein funktionaler Zusammenhang der Erwartungswerte zu betrachten. Da eine Verschränkung nur positiv definiert ist, wird folgender Zusammenhang untersucht:

$$\left| |\langle x_1 x_2 x_3 \rangle| - \tilde{c}_1 \{ |\text{Cov}(x_1, x_2)| + |\text{Cov}(x_1, x_3)| + |\text{Cov}(x_2, x_3)| \} \right| \quad (5.181)$$

Vom dreidimensionalen Erwartungswert wird die mit \tilde{c}_1 skalierte Summe der Kovarianzen subtrahiert. In Abb. 5.11 wird diese Größe mit dem Tangle als Funktion des Parameters Δ verglichen. Man erkennt einen klaren Zusammenhang. Sowohl das Minimum bei $\Delta = 3$, das lokale Maximum bei $\Delta = 1$ und das Maximum im Limes $\Delta \rightarrow \infty$ sind deutlich zu sehen.

5.3.3 Vergleich: Concurrence - Kovarianz

Es wurde bei Betrachtung der Zustände festgestellt, daß bei gleicher Concurrence auch die jeweilige Kovarianz gleich war, also

$$C_{12} = C_{13} \iff \text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_1, x_3) \quad (5.182)$$

$$C_{12} = C_{23} \iff \text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_2, x_3) \quad (5.183)$$

$$C_{13} = C_{23} \iff \text{Cov}(x_1, x_3) = \text{Cov}(x_2, x_3) \quad (5.184)$$

Im folgenden wird ein bestimmter Ansatz versucht, um diese Gleichheit allgemein zu beweisen. Aus den Zusammenhängen aus der Arbeit von Coffman et al. [34] kann man Gleichungen für die Concurrences herleiten, in denen nur die auf ein Qubit reduzierten Dichtematrizen ρ_i und das Tangle τ vorkommen, vgl. ebenfalls Kallosh und Linde [62]:

$$C_{12}^2 = 2 \left(\text{Det}(\rho_3) - \text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_2) \right) + \frac{1}{2} \tau_{123} \quad (5.185)$$

$$C_{13}^2 = 2 \left(\text{Det}(\rho_2) - \text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_3) \right) + \frac{1}{2} \tau_{123} \quad (5.186)$$

$$C_{23}^2 = 2 \left(\text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_2) - \text{Det}(\rho_3) \right) + \frac{1}{2} \tau_{123} \quad (5.187)$$

Durch gleichsetzen kann das Tangle entfernt und Bedingungen für die Gleichheit der Concurrences abgeleitet werden, die nur von den Determinanten der reduzierten Dichtematrizen abhängen. Mit diesen ist einfacher zu arbeiten, als mit den Concurrences selber:

$$C_{12} = C_{13} \iff \text{Det}(\rho_2) - \text{Det}(\rho_3) = 0 \quad (5.188)$$

$$C_{12} = C_{23} \iff \text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_3) = 0 \quad (5.189)$$

$$C_{13} = C_{23} \iff \text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_2) = 0, \quad (5.190)$$

wobei die Bedingung positiv definierter Concurrences benutzt wurde. Unter der Annahme reeller α_i , lassen sich die Ausdrücke auf der rechte Seite weiter umformen. Somit erhält man als Bedingungen für die Gleichheit der Concurrences:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_2) &= \left((-\alpha_2 + \alpha_8)(\alpha_3 + \alpha_5) + (\alpha_4 + \alpha_6)(\alpha_1 - \alpha_7) \right) \\ &\quad \left(-(\alpha_4 - \alpha_6)(\alpha_1 + \alpha_7) + (\alpha_3 - \alpha_5)(\alpha_2 + \alpha_8) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.191)$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_3) &= \left((\alpha_1 - \alpha_6)(\alpha_4 + \alpha_7) - (\alpha_2 + \alpha_5)(\alpha_3 - \alpha_8) \right) \\ &\quad \left(-(\alpha_1 + \alpha_6)(\alpha_4 - \alpha_7) + (\alpha_2 - \alpha_5)(\alpha_3 + \alpha_8) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.192)$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(\rho_2) - \text{Det}(\rho_3) = & \left((\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_6 + \alpha_7) - (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_5 - \alpha_8) \right) \\ & \left(-(\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_6 - \alpha_7) + (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_5 + \alpha_8) \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.193)$$

Betrachtet man nun beispielsweise die Beziehung zwischen C_{12} und C_{23} , so muß $\text{Det}(\rho_1) - \text{Det}(\rho_3) = 0$ sein. Eine Bedingung hierfür ist:

$$(\alpha_1 - \alpha_6)(\alpha_4 + \alpha_7) = (\alpha_2 + \alpha_5)(\alpha_3 - \alpha_8) \quad (5.194)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, falls die rechte Seite und die linke Seite gleich Null sind, also:

$$\left(\alpha_1 = \alpha_6 \vee \alpha_4 = -\alpha_7 \right) \wedge \left(\alpha_2 = -\alpha_5 \vee \alpha_3 = \alpha_8 \right). \quad (5.195)$$

Setzt man diese Bedingungen mittels Computeralgebra Programm in

$$\text{Cov}(x_1, x_2) - \text{Cov}(x_2, x_3)$$

ein, so erhält man nur die Null, falls gleichzeitig alle Parametergleichheiten berücksichtigt werden. Es gibt also Zustände, bei denen gleiche Concurrences nicht durch gleiche Kovarianzen in den QW Modellen erkennbar sind.

5.3.4 Bemerkung zur Phasenabhängigkeit

Wie bereits beim GHZ-Zustand diskutiert, ist der QW und sind somit die Erwartungswerte in starkem Maße abhängig von Phasenwinkeln. Da diese erstens im Experiment nur schwer kontrolliert werden können und zweitens die Verschränkungsmaße nur bedingt von der Phase abhängen, lieferte eine Mittelung über alle möglichen Phaseneinstellungen, zumindest beim GHZ-Zustand, den direkten Zusammenhang zwischen Erwartungswerten und Verschränkungsmaßen.

Um den Phaseneinfluß bzw. die Mittelung genauer zu studieren, kann man einen allgemeinen Zustand mit beliebigen Phasenwinkeln betrachten:

$$|\phi_0\rangle = \sum_{k=1}^8 \alpha_k e^{i\varphi_k} |k\rangle \quad (5.196)$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\varphi_k \in [0, 2\pi]$ und den Standardbasisvektoren $|k\rangle$. Die Berechnung der Erwartungswerte erfolgt wie oben beschrieben, mit der anschließenden Mittelung über alle φ_k , hier beispielsweise demonstriert an $\langle x_1 \rangle$:

$$\langle \langle x_1 \rangle \rangle_\varphi = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots \int_0^{2\pi} d\varphi_8 \langle x_1 \rangle = \tilde{c}_1 \{ \dots \} \quad (5.197)$$

Man erhält im Vergleich zur allgemeinen Form (5.106) nur den \tilde{c}_1 Anteil, welcher allein von den Diagonalelementen der Dichtematrix abhängt. Gleiche Resultate erhält man für die anderen Erwartungswerte. Es ist durchaus logisch, daß durch eine Mittelung gewisse Information verloren geht. Vergleicht man aber die Erwartungswerte für den Zustand $|\psi_{78}\rangle$, einmal mit, einmal ohne Mittelung, so verliert man z.B. für die eindimensionalen Erwartungswerte $\langle x_i \rangle$ die vollständige Parameterabhängigkeit. Man verliert also nicht nur die unnötige Information, sonder erleidet einen gesamten Informationsverlust. Die Phasensensitivität des QW muß also entweder auf anderem Wege ausgeschaltet werden, oder

man muß mit ihr teilweise zurecht kommen, um die nötigen Verschränkungsinformationen herauszuarbeiten. Daß Verschränkungsmaße durchaus Phasensensitiv sein können, beweist nachstehendes Beispiel von Lohmayer et al. [78]. Der betrachtete Zustand ist eine parameterabhängige Superposition von GHZ- und W-Zustand:

$$|Z(p, \varphi)\rangle = \sqrt{p}|GHZ\rangle - e^{i\varphi}\sqrt{1-p}|W\rangle. \quad (5.198)$$

Die Berechnung des Tangle ergibt:

$$\tau_{123}(|Z(p, \varphi)\rangle) = \left| p^2 - \frac{8\sqrt{6}}{9} \sqrt{p(1-p)^3} e^{3i\varphi} \right| \quad (5.199)$$

und somit eine Abhängigkeit von φ .

5.3.5 Diskussion

Die Verschränkungsstruktur eines 3-Qubit Zustandes ist natürlich komplizierter als die eines 2-Qubit Zustandes. Es kann neben verschiedenen 2-Qubit Verschränkungen, eine zusätzliche 3-Qubit Verschränkung auftreten. Dennoch ist es möglich, mit den Ortserwartungswerten eines dreidimensionalen QW, die Struktur aufzuklären. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß die unterschiedlichen Verschränkungen sowohl Einfluß auf die zweidimensionalen Mittelwerte $\langle x_i x_j \rangle$, als auch auf den dreidimensionalen Mittelwert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ haben.

Wie im zweidimensionalen Fall konnte der direkte Zusammenhang zwischen den quadrierten Mittelwerten $\langle x_i \rangle^2$ und der I-Concurrence gezeigt werden. Dabei wurde ebenfalls auf den Zusammenhang zwischen den Mittelwerten und den Elementen der reduzierten Dichtematrizen hingewiesen.

5.4 Vierdimensionaler QW

In diesem Unterabschnitt wird der Verschränkungseinfluß eines 4-Qubit Coin Startzustandes auf einen vierdimensionalen QW untersucht. Ein allgemeiner 4-Qubit Zustand kann in der Standardbasis als:

$$|\phi_0\rangle = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i |i\rangle \quad (5.200)$$

geschrieben werden. Wie im einleitenden Kapitel über Verschränkungsmaße bereits diskutiert, ist die Verschränkungsstruktur eines 4-Qubit Zustandes noch nicht vollständig analysierbar. Im folgenden werden die Ortserwartungswerte als Funktion der α_i abgeleitet. Danach werden Beispielszustände betrachtet und diskutiert.

5.4.1 Berechnung der Erwartungswerte

5.4.1.1 1D Mittelwerte und I-Concurrence

Die analytische Berechnung der Erwartungswerte verläuft wie in den vorher diskutierten Modellen nach der verallgemeinerten Methode nach dem Vorbild von Brun et al. [25] und einer Vereinfachung mittels der abgeleiteten Lemmas. Den eindimensionalen Mittelwert $\langle x_1 \rangle$ erhält man durch Vereinfachung des Integrals:

$$\langle x_1 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3}, k_{x_4} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} dk_{x_4} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle. \quad (5.201)$$

Nach benutzen der Lemmas (1) und (2) gelangt man zu:

$$\langle x_1 \rangle = \tilde{c}_1 \left\{ \sum_{i=1}^8 |\alpha_i|^2 - \sum_{i=9}^{16} |\alpha_i|^2 \right\} + \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_2 \alpha_{10}^* + \alpha_3 \alpha_{11}^* + \alpha_4 \alpha_{12}^* + \right. \\ \left. \alpha_5 \alpha_{13}^* + \alpha_6 \alpha_{14}^* + \alpha_7 \alpha_{15}^* + \alpha_8 \alpha_{16}^* + c.c. \right\}. \quad (5.202)$$

Den Zusammenhang mit der I-Concurrence erhält man über die Komponenten der reduzierten Dichtematrix $\rho_1 = tr_{234}(\rho_{1234})$ wobei $\rho_{1234} = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$ ist. Kürzt man die Elemente mit $R_{ij}^{(1)} := (\rho_1)_{ij}$ ab, so erhält man für die Spur der quadrierten reduzierten Dichtematrix:

$$tr(\rho_1^2) = (R_{11}^{(1)})^2 + (R_{22}^{(1)})^2 + 2R_{12}^{(1)}R_{21}^{(1)} \quad (5.203)$$

Der quadrierte Mittelwert läßt sich wieder in folgender Form schreiben:

$$\langle x_1 \rangle = \tilde{c}_1 \left\{ R_{11}^{(1)} - R_{22}^{(1)} \right\} + \tilde{d}_1 \left\{ R_{12}^{(1)} + R_{21}^{(1)} \right\} \quad (5.204)$$

Mit der gewohnten Annahme großer Zeiten, d.h. Gleichheit von \tilde{c}_1 und \tilde{d}_1 , gelangt man zum Zusammenhang zwischen Mittelwert und I-Concurrence:

$$\langle x_1 \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_{1-23}^2) + \text{Rest}_{x_1} \right\} \quad (5.205)$$

Die Struktur ist die gleiche wie im zwei- und dreidimensionalen Fall. Die exakte Darstellung der Mittelwerte $\langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle$ und $\langle x_4 \rangle$ als Funktion der α_i erhält man über folgende Integranden:

$$\langle x_2 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.206)$$

$$\langle x_3 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.207)$$

$$\langle x_4 \rangle \rightarrow \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_{k_{x_4}}^{(1)} | \phi_0 \rangle \quad (5.208)$$

Die Auflistung der Mittelwerte befindet sich in Anhang B. Die Zusammenhänge mit der I-Concurrence erhält man über die gleiche Rechnung wie oben. Als allgemeines Ergebnis kann man wieder folgende Gleichung festhalten:

$$\langle x_i \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_i^2) + \text{Rest}_{x_i} \right\} \quad (5.209)$$

Die Diskussion der Restterme erfolgt bei Betrachtung der Beispielszustände.

5.4.1.2 2D, 3D & 4D Erwartungswerte

Die Berechnung der höheren Erwartungswerte erfolgt analog. Für den zweidimensionalen Erwartungswert $\langle x_1 x_2 \rangle$ benötigt man:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{i^2}{(2\pi)^4} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3}, k_{x_4} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} dk_{x_4} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.210)$$

Die Auswertung liefert:

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 - \right. \\ & \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\ & + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_{13}^* + \alpha_2 \alpha_{14}^* + \alpha_3 \alpha_{15}^* + \alpha_4 \alpha_{16}^* + \alpha_5 \alpha_9^* + \alpha_6 \alpha_{10}^* + \alpha_7 \alpha_{11}^* + \alpha_8 \alpha_{12}^* + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2 \alpha_{10}^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_3 \alpha_{11}^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_4 \alpha_{12}^* - \right. \\ & \left. \alpha_5 \alpha_{13}^* - \alpha_6 \alpha_{14}^* - \alpha_7 \alpha_{15}^* - \alpha_8 \alpha_{16}^* - \alpha_9 \alpha_{13}^* - \alpha_{10} \alpha_{14}^* - \alpha_{11} \alpha_{15}^* - \alpha_{12} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (5.211) \end{aligned}$$

Verwendet man wieder die Schreibweise $R_{ij}^{(12)} := (\rho_{12})_{ij}$ für die Komponenten der reduzierten Dichtematrix, so erhält man die gleiche Form wie im dreidimensionalen Fall, vgl (5.121):

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ R_{11}^{(12)} - R_{22}^{(12)} - R_{33}^{(12)} + R_{44}^{(12)} \right\} + \tilde{d}_1^2 \left\{ R_{14}^{(12)} + R_{41}^{(12)} + R_{23}^{(12)} + R_{32}^{(12)} \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ R_{12}^{(12)} + R_{21}^{(12)} + R_{13}^{(12)} + R_{31}^{(12)} - R_{24}^{(12)} - R_{42}^{(12)} - R_{34}^{(12)} - R_{43}^{(12)} \right\} \quad (5.212) \end{aligned}$$

In Anhang B befindet sich die exakte Darstellung der Mittelwerte $\langle x_1 x_3 \rangle$, $\langle x_1 x_4 \rangle$, $\langle x_2 x_3 \rangle$, $\langle x_2 x_4 \rangle$ und $\langle x_3 x_4 \rangle$. Die Berechnung der drei- und vierdimensionalen Erwartungswerte erfolgt über:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \frac{i^3}{(2\pi)^4} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3}, k_{x_4} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} dk_{x_4} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} | \phi_0 \rangle \quad (5.213)$$

und

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \frac{i^4}{(2\pi)^4} \int_{k_{x_1}, k_{x_2}, k_{x_3}, k_{x_4} = -\pi}^{\pi} dk_{x_1} dk_{x_2} dk_{x_3} dk_{x_4} \langle \phi_0 | \tilde{H}_{k_{x_1}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_2}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_3}}^{(1)} \otimes \tilde{H}_{k_{x_4}}^{(1)} | \phi_0 \rangle. \quad (5.214)$$

Zur vollständigen Darstellung als Funktion der α_i vgl. Anhang B. Diese Mittelwerte lassen sich wieder in allgemeiner Darstellung in den Elementen der (reduzierten) Dichtematrizen schreiben, was hier nicht explizit ausgeführt wird.

Zusammengefaßt können die Mittelwerte, unabhängig von der Anzahl der Raumdimensionen, also folgendermaßen geschrieben werden:

$$\langle x_i \rangle = f_1(R_{mn}^{(i)}) \quad (5.215)$$

$$\langle x_i x_j \rangle = f_2(R_{mn}^{(ij)}) \quad (5.216)$$

$$\langle x_i x_j x_k \rangle = f_3(R_{mn}^{(ijk)}) \quad (5.217)$$

wobei die $R_{mn}^{(x)}$, die Elemente der auf das x -te Qubit bzw. Qubitgruppe reduzierten Dichtematrix sind, also $R_{mn}^{(x)} := (\rho_x)_{mn}$.

5.4.2 Betrachtung der Beispielszustände

Die im folgenden betrachteten Beispielszustände sind wie im 3-Qubit Fall aus verschiedenen Verschränkungsklassen gewählt und haben somit allgemeinen Charakter. Wie in

Kapitel 2 wird zuerst der parameterabhängige 4-Qubit GHZ-Zustand untersucht. Es folgen der Miyake Zustand, und die beiden Eigenzustände einer Heiseberg Spinkette, die eine komplizierte Parameterstruktur aufweisen.

5.4.2.1 Parameterabhängige GHZ Zustände

2-Qubit Verschränkung: Um die Diskussion mit einem Einfachstbeispiel zu beginnen, kann man folgenden Zustand untersuchen:

$$\gamma|0000\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|1100\rangle = \left(\gamma|00\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|11\rangle\right) \otimes |00\rangle \quad (5.218)$$

Nur die Qubits 1 und 2 sind verschränkt, die Qubits 3 und 4 können als Produkt angehängt werden. Um die Verschränkungsstruktur abzubilden, genügt eigentlich die Betrachtung der eindimensionalen Erwartungswerte $\langle x_i \rangle$. Die Berechnung dieser ergibt:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \tilde{c}_1(2\gamma^2 - 1) \quad (5.219)$$

$$\langle x_3 \rangle = \langle x_4 \rangle = \tilde{c}_1 \quad (5.220)$$

Diese können in der Form (5.209), mit verschwindendem Restterm Rest_{x_i} geschrieben werden, da die I-Concurrences folgende bekannte Form haben:

$$IC_1 = IC_2 = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \quad IC_3 = IC_4 = 0 \quad (5.221)$$

Allein die Concurrence $C_{12} = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}$ hat einen endlichen Wert, alle anderen Concurrences sind gleich 0. Die Auswertung der zweidimensionalen Mittelwerte ergibt:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.222)$$

$$\langle x_1 x_3 \rangle = \langle x_1 x_4 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle = \langle x_2 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2(2\gamma^2 - 1) \quad (5.223)$$

$$\langle x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2 \quad (5.224)$$

Nur die Kovarianz $\text{Cov}(x_1, x_2)$ ist ungleich Null:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) + \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.225)$$

alle anderen Kovarianzen $\text{Cov}(x_i, x_j)$ sind gleich Null, die zugehörigen zweidimensionalen Erwartungswerte können somit aus Produkten der eindimensionalen Erwartungswerte zusammengesetzt werden. Die drei- und vierdimensionalen Erwartungswerte:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \langle x_1 x_2 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^3 + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.226)$$

$$\langle x_1 x_3 x_4 \rangle = \langle x_2 x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^3(2\gamma^2 - 1) \quad (5.227)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^4 + \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1^2 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi, \quad (5.228)$$

können ebenfalls als Produkt niederdimensionaler Erwartungswerte geschrieben werden, wie z.B.:

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \quad (5.229)$$

$$\langle x_1 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_3 \rangle \langle x_4 \rangle \quad (5.230)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \langle x_4 \rangle \quad (5.231)$$

Die Verschränkungsstruktur des Zustandes ist also an der Produktform der Ortserwartungswerte erkennbar. Die Verschränkung läßt sich sowohl mit den Mittelwerten $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_2 \rangle$ also auch mit der phasengemittelten Kovarianz $\text{Cov}(x_1, x_2)$ bestimmen.

3-Qubit Verschränkung: Bei der Betrachtung des folgenden Zustandes stößt man schon an die Grenzen der Verschränkungsmessung. Der Zustand:

$$\gamma|0000\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|1110\rangle = \left(\gamma|000\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|111\rangle\right) \otimes |0\rangle \quad (5.232)$$

ist als 3-Qubit GHZ-Zustand mit angehängtem vierten Qubit konstruiert. Für eine 3-Qubit Verschränkung innerhalb eines 4-Qubit Zustandes existiert aber noch keine Möglichkeit einer Quantifizierung. Mit den Erwartungswerten des QW läßt sich dennoch die Struktur abbilden. Die Berechnung der Erwartungswerte liefert:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \langle x_3 \rangle = \tilde{c}_1(2\gamma^2 - 1) \quad (5.233)$$

$$\langle x_4 \rangle = \tilde{c}_1 \quad (5.234)$$

$$\langle x_1x_2 \rangle = \langle x_1x_3 \rangle = \langle x_2x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2 \quad (5.235)$$

$$\langle x_1x_4 \rangle = \langle x_2x_4 \rangle = \langle x_3x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2(2\gamma^2 - 1) \quad (5.236)$$

$$\langle x_1x_2x_3 \rangle = \tilde{c}_1^3(2\gamma^2 - 1) + \tilde{d}_1^3 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.237)$$

$$\langle x_1x_2x_4 \rangle = \langle x_1x_3x_4 \rangle = \langle x_2x_3x_4 \rangle = \tilde{c}_1^3 \quad (5.238)$$

$$\langle x_1x_2x_3x_4 \rangle = \tilde{c}_1^4(2\gamma^2 - 1) + \tilde{c}_1\tilde{d}_1^3 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi \quad (5.239)$$

Der Zusammenhang zwischen $\langle x_i \rangle$ und I-Concurrence ist klar, die Restterme verschwinden. Die Erwartungswerte haben die gleiche Struktur wie im Falle des 3-Qubit GHZ-Zustandes. Alle Erwartungswerte, die die x_4 Richtung enthalten, also das vierte Qubit abbilden, können als Produkte niederdimensionaler Erwartungswerte geschrieben werden:

$$\langle x_1x_2x_4 \rangle = \langle x_1x_2 \rangle \langle x_4 \rangle, \quad \langle x_1x_3x_4 \rangle = \langle x_1x_3 \rangle \langle x_4 \rangle, \quad \langle x_2x_3x_4 \rangle = \langle x_2x_3 \rangle \langle x_4 \rangle \quad (5.240)$$

$$\langle x_1x_2x_3x_4 \rangle = \langle x_1x_2x_3 \rangle \langle x_4 \rangle. \quad (5.241)$$

Die Kovarianzen aus Kombinationen der ersten drei Richtungen, also der ersten drei Qubits, enthalten wie im 3-Qubit GHZ-Fall die vollständige Verschränkungsinformation:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_1, x_3) = \text{Cov}(x_2, x_3) = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) \quad (5.242)$$

$$\text{Cov}(x_1, x_4) = \text{Cov}(x_2, x_4) = \text{Cov}(x_3, x_4) = 0. \quad (5.243)$$

4-Qubit Verschränkung: Der 4-Qubit GHZ-Zustand:

$$\gamma|0000\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{1-\gamma^2}|1111\rangle \quad (5.244)$$

ist 4-Qubit verschränkt. Die Berechnung der Erwartungswerte ergibt:

$$\langle x_i \rangle = \tilde{c}_1(2\gamma^2 - 1) \quad (5.245)$$

$$\langle x_ix_j \rangle = \tilde{c}_1^2 \quad (5.246)$$

$$\langle x_ix_jx_k \rangle = \tilde{c}_1^3(2\gamma^2 - 1) \quad (5.247)$$

$$\langle x_1x_2x_3x_4 \rangle = \tilde{c}_1^4 + \tilde{d}_1^4 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \cos \varphi. \quad (5.248)$$

Die Erwartungswerte ergeben ein ähnliches Bild wie im 3-Qubit GHZ-Fall. Die eindimensionalen Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ stehen im funktionalen Zusammenhang (5.209) mit der quadrierten I-Concurrence. Die Restterme verschwinden. Die zweidimensionalen $\langle x_ix_j \rangle$ sind

konstant und deuten auf die Concurrences hin, welche gleich Null sind. Die Berechnung der Kovarianzen liefert:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \tilde{c}_1^2 4\gamma^2(1 - \gamma^2) \quad (5.249)$$

Das Ergebnis entspricht dem 3-Qubit Fall, nur daß hier eine 4-Qubit Verschränkung vorliegt. Zur Diskussion der 4-Qubit Verschränkung des 4-Qubit GHZ-Zustandes, vgl. Seite 18. Die dreidimensionalen Erwartungswerte können als Produkt niederdimensionaler Erwartungswerte geschrieben werden:

$$\langle x_i x_j x_k \rangle = \langle x_i x_j \rangle \langle x_k \rangle \quad (5.250)$$

Der vierdimensionale Erwartungswert hat eine interessante Form. Im direkten Vergleich mit dem dreidimensionalen Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ des 3-Qubit GHZ-Zustandes, vgl. (5.140), ist der \tilde{c}_1 Anteil parameterunabhängig. Nur der \tilde{d}_1 Anteil hat die gleiche Form. Bei einer Phasenmittelung wäre der Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle$ also parameterunabhängig. Die Information über eine vorliegende 4-Qubit Verschränkung wäre folglich nur in den Kovarianzen enthalten. Bei Zuständen mit einer von Null verschiedenen Concurrence ist daher wieder eine funktionale Kombination aller Erwartungswerte notwendig, um eine vollständige Verschränkungscharakterisierung zu erreichen.

5.4.2.2 Reduzierter Miyake Zustand

Der Zustand:

$$\begin{aligned} |G_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle = & \alpha(|0000\rangle + |1111\rangle) + \beta(|0011\rangle + |1100\rangle) \\ & + \gamma(|0101\rangle + |1010\rangle) + \delta(|0110\rangle + |1001\rangle) \end{aligned} \quad (5.251)$$

gehört mit einer von Null verschiedenen Hyperdeterminanten $\text{Det } A_4$ zu der äußersten SLOCC Klasse. Wie im einleitenden Kapitel wird $\beta = \delta = \gamma$ und $2\alpha^2 + 6\gamma^2 = 1$ gesetzt, um die Anzahl der Parameter zu reduzieren:

$$\begin{aligned} |G_{\alpha\gamma}\rangle = & \alpha(|0000\rangle + |1111\rangle) + \gamma(|0011\rangle + |1100\rangle + \\ & |0101\rangle + |1010\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle). \end{aligned} \quad (5.252)$$

Die I-Concurrences sind für diesen Zustand parameterunabhängig und gleich, $IC_i = 1$. Ebenso sind alle Concurrences C_{ij} gleich:

$$C_{ij} = \begin{cases} 4\gamma(\alpha - \gamma) & \text{if } 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 2(\gamma^2 - \alpha^2) & \text{if } \frac{1}{\sqrt{8}} < \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (5.253)$$

Die Berechnung der Ortserwartungswerte des QW liefert folgende Ergebnisse. Die ein- und dreidimensionalen Mittelwerte sind gleich Null:

$$\langle x_i \rangle = 0 \quad (5.254)$$

$$\langle x_i x_j x_k \rangle = 0 \quad (5.255)$$

Da die I-Concurrences gleich 1 sind, ist der Zusammenhang (5.209) erfüllt, wobei die Restterme gleich Null sind. Das Verschwinden der Mittelwerte $\langle x_i x_j x_k \rangle$ läßt ebenfalls auf einen Zusammenhang mit der I-Concurrence schließen. Auch eine Produktform wie im Fall

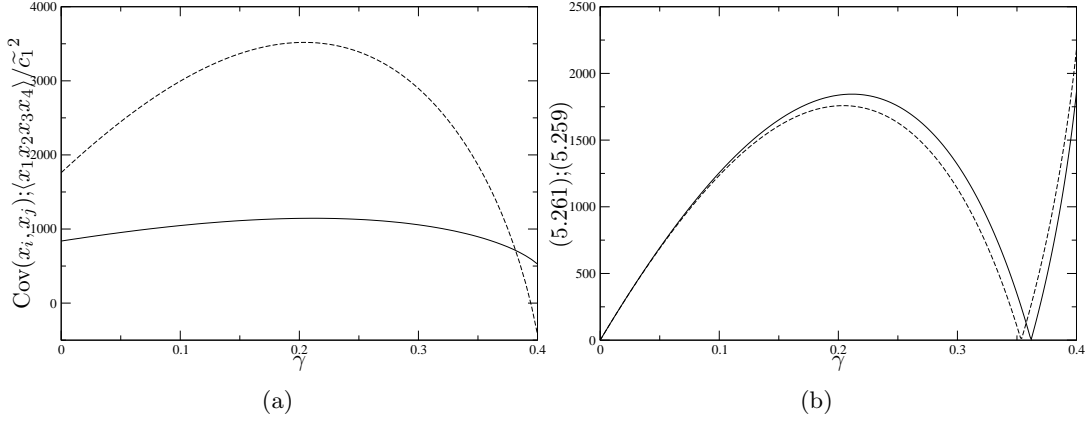


Abbildung 5.12: Erwartungswerte und Kovarianzen des Miyake Zustandes (5.252) als Funktion von γ . Linke Seite: Skalierter Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle / \tilde{c}_1^2$ (gestrichelte Linie) und Kovarianz $\text{Cov}(x_i, x_j)$ (durchgezogene Linie) als Funktion von γ . Plots der analytischen Lösungen für $t = 100$. Rechte Seite: Darstellung des angepaßten Erwartungswertes (5.261) (gestrichelte Linie) und der angepaßten Kovarianzen (5.259) (durchgezogene Linie) als Funktion von γ für $t = 100$.

des 4-Qubit GHZ-Zustandes kann auf dieses Ergebnis führen, vgl. (5.250). Die zwei- und vierdimensionalen Erwartungswerte sind parameterabhängig:

$$\langle x_i x_j \rangle = \tilde{c}_1^2 (2\alpha^2 - 2\gamma^2) + \tilde{d}_1^2 4\gamma(\alpha + \gamma) \quad (5.256)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1^2 24\gamma(\alpha - \gamma) + \tilde{c}_1^4 + \tilde{d}_1^4 \quad (5.257)$$

Da die Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ gleich Null sind, entsprechen die zweidimensionalen Erwartungswerte den Kovarianzen:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \langle x_i, x_j \rangle \quad (5.258)$$

In Abb. 5.12a sind sowohl der skalierte Erwartungswert $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle / \tilde{c}_1^2$, als auch die Kovarianz $\text{Cov}(x_i, x_j)$ als Funktion des Parameters γ aufgetragen. Vergleicht man beide Größen mit der Concurrence und den Abschätzungen für eine 4-Qubit Verschränkung, vgl. Abb. 2.7a,b, so erkennt man keinen direkten Zusammenhang.

Man erkennt aber, daß sowohl die Kovarianz, als auch der Mittelwert $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle$ für $\gamma = 0$ einen endlichen Wert haben, also ungleich Null sind. Um einen Vergleich mit der Concurrence zu bekommen, kann man die Nulllinie der Kovarianz verschieben. Der Wert für $\gamma = 0$ entspricht genau einem Faktor \tilde{c}_1^2 . Man kann also folgende Größe betrachten:

$$\left| \text{Cov}(x_i, x_j) - [\text{Cov}(x_i, x_j)]_{\gamma=0} \right| = \left| \text{Cov}(x_i, x_j) - \tilde{c}_1^2 \right| \quad (5.259)$$

und mit der Concurrence vergleichen. In Abb. 5.12b ist diese Größe als Funktion von γ aufgetragen. Vergleicht man diese Abbildung mit dem Plot der Concurrence, siehe Abb. 2.7a, so erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung. Die analytische Auswertung im Limes großer Zeiten liefert:

$$\left| \text{Cov}(x_i, x_j) - \tilde{c}_1^2 \right| = \begin{cases} \tilde{c}_1^2 4\gamma(\alpha - \gamma) & \text{if } 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\tilde{c}_1^2 4\gamma(\alpha - \gamma) & \text{if } \frac{1}{\sqrt{8}} < \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (5.260)$$

Im Bereich $0 \leq \gamma \leq 1/\sqrt{8}$ entspricht die umskalierte Kovarianz genau der Concurrence. Im Bereich $\gamma \geq 1/\sqrt{8}$ entsteht eine Abweichung zur Concurrence. Verschiebt man ebenso die Nulllinie des vierdimensionalen Mittelwertes:

$$\left| \langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle - [\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle]_{\gamma=0} \right|, \quad (5.261)$$

so erhält man ebenfalls gleiche Parameterabhängigkeit wie die Concurrences, siehe Abb. 5.12b. Bei dieser Art der Umskalierung würde die Kombination:

$$|\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle| - \sum |\text{Cov}(x_i, x_j)| \quad (5.262)$$

gleich Null werden. Es gäbe also keinen möglichen Zusammenhang mit einer 4-Qubit Verschränkung.

Bei der Betrachtung von Zuständen mit einer komplexen Verschränkungsstruktur ist folglich die Wahl der Nulllinie entscheidend.

5.4.2.3 Heisenberg Zustand $|\phi_{15}\rangle$

Die Verschränkungsstruktur des Zustandes $|\phi_{15}\rangle$ ist dem Miyake Zustand ähnlich. Der Zustand:

$$|\phi_{15}\rangle = -\beta_1|0011\rangle + \beta_1|0110\rangle - \beta_1|1001\rangle + \beta_1|1100\rangle - \beta_2|0101\rangle + \beta_2|1010\rangle \quad (5.263)$$

ist wie bereits diskutiert, Eigenzustand einer Heisenberg Spinkette. Die Parameter β_i sind komplizierte Funktionen der Wechselwirkungsparameter J und J_s , vgl. (2.81) bzw. (2.82). Die folgende Parameterdiskussion der Verschränkung bezieht sich also immer auf J und J_s . Eine Darstellung der Verschränkungsmaße ist in Anhang A enthalten.

Ebenso wie im vorherigen Beispiel des Miyake Zustandes, sind die auf ein Qubit reduzierten I-Concurrences parameterunabhängig:

$$IC_i = 1 \quad (5.264)$$

Die ein- und dreidimensionalen Ortserwartungswerte sind gleich 0:

$$\langle x_i \rangle = 0 \quad (5.265)$$

$$\langle x_i x_j x_k \rangle = 0 \quad (5.266)$$

Die eindimensionalen Erwartungswerte erfüllen damit den Zusammenhang (5.209) mit verschwindendem Restterm. Die Diskussion des Mittelwertes $\langle x_i x_j x_k \rangle$ entspricht der des Miyake Zustandes. Einerseits könnte ein direkter Zusammenhang mit der I-Concurrence bestehen, andererseits ist eine Zusammensetzung als Produkt aus niederdimensionalen Erwartungswerten möglich.

Interessant wird die Betrachtung der zwei- und vierdimensionalen Mittelwerte:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_2 x_3 \rangle = -\tilde{c}_1^2 2\beta_2^2 + \tilde{d}_1^2 4\beta_1\beta_2 \quad (5.267)$$

$$\langle x_1 x_4 \rangle = \langle x_3 x_4 \rangle = -\tilde{c}_1^2 2\beta_2^2 - \tilde{d}_1^2 4\beta_1\beta_2 \quad (5.268)$$

$$\langle x_1 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2 (-4\beta_1^2 + 2\beta_2^2) + \tilde{d}_1^2 4\beta_1^2 \quad (5.269)$$

$$\langle x_2 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2 (-4\beta_1^2 + 2\beta_2^2) - \tilde{d}_1^2 4\beta_1^2 \quad (5.270)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^4 - \tilde{d}_1^4. \quad (5.271)$$

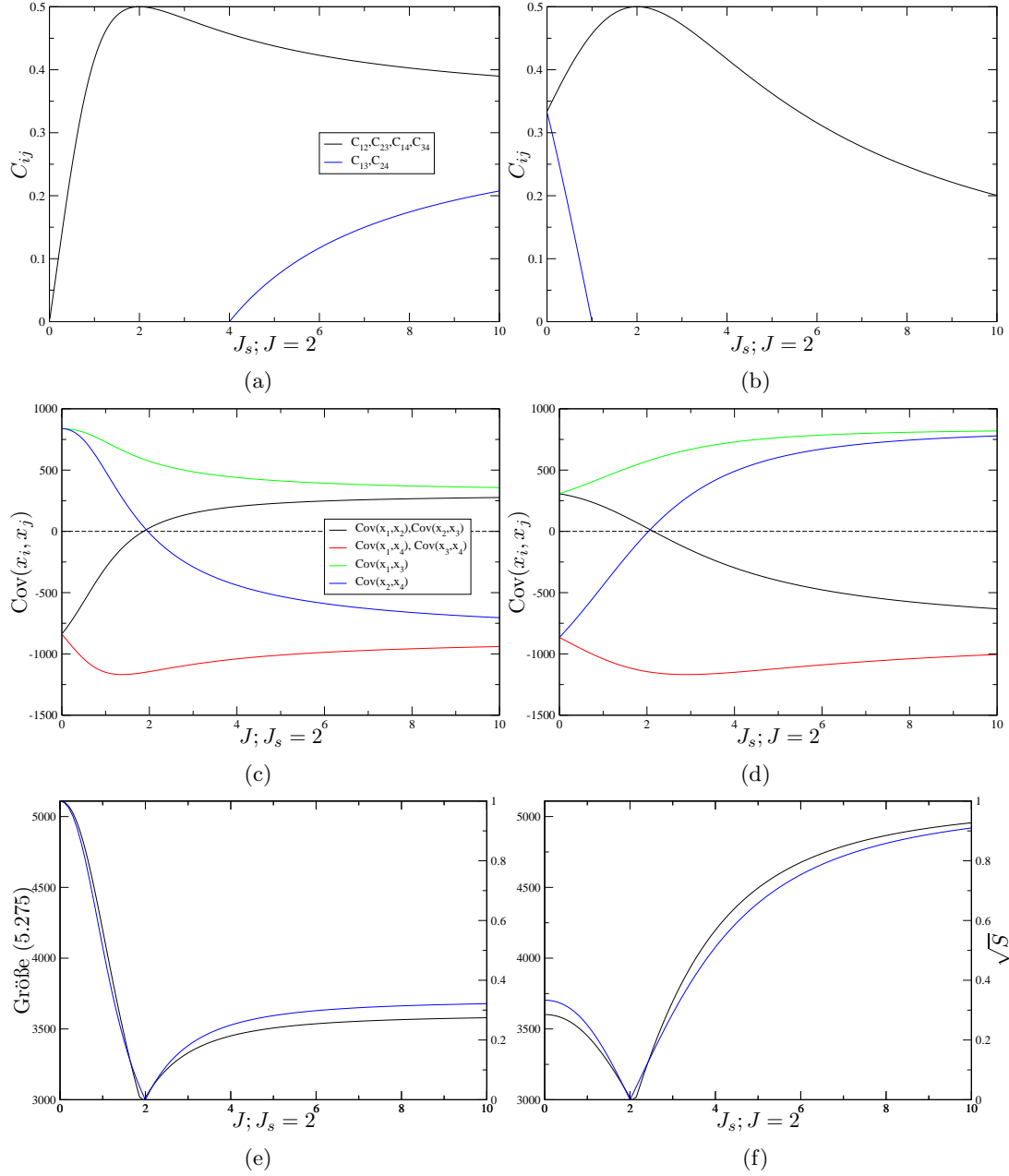


Abbildung 5.13: Concurrences (a,b), Kovarianzen (c,d) und die Größe (5.275) (e,f)(schwarze Linie) für den Zustand $|\phi_{15}\rangle$. Linke Spalte als Funktion von J mit $J_s = 2$. Rechte Spalte als Funktion von J_s mit $J = 2$. Die Legenden haben Gültigkeit für beide Spalten. In den Abb. e,f ist auf der rechten y-Achse zusätzlich die \sqrt{S} Invariante (blaue Linie) aufgetragen.

Der vierdimensionale Mittelwert ist parameterunabhängig und im Limes großer Zeiten gleich Null. Die Kovarianzen entsprechen den zweidimensionalen Mittelwerten, da die $\langle x_i \rangle$ gleich Null sind:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \langle x_i, x_j \rangle. \quad (5.272)$$

Die Verteilung der Kovarianzen entspricht für diesen Zustand nicht der Verteilung der Concurrences:

$$C_{12} = C_{23} = C_{14} = C_{34} \iff \text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(x_2, x_3) \neq \text{Cov}(x_1, x_4) = \text{Cov}(x_3, x_4) \quad (5.273)$$

und

$$C_{13} = C_{24} \iff \text{Cov}(x_1, x_3) \neq \text{Cov}(x_2, x_4). \quad (5.274)$$

Die Nichtgleichheit folgt aus dem Unterschied der Vorzeichen des jeweiligen \tilde{d}_1^2 Anteils. Ebenso sind die Parameterabhängigkeit der Concurrences und der Kovarianzen nicht direkt miteinander vergleichbar. In den Abb. 5.13 a,b sind die Concurrences, in den Abb. 5.13 c,d, die Kovarianzen als Funktion von J mit konstantem $J_s = 2$ bzw. von J_s mit konstantem $J = 2$ aufgetragen. Da einerseits die Concurrences C_{13}, C_{24} in bestimmten Parameterbereichen Null sind und aufgrund der Diskussion der Nulllinie bei Betrachtung des Miyake Zustandes, erweist sich die Relationsfindung zwischen der 2-Qubit Verschränkung und den Kovarianzen als schwierig.

Einfacher ist in diesem Falle die Diskussion der 4-Qubit Verschränkung. Man kann wieder folgenden Zusammenhang zwischen vierdimensionalen Mittelwert und Summe der Kovarianzen betrachten:

$$\left| |\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle| - \sum |\text{Cov}(x_i, x_j)| \right|, \quad (5.275)$$

wobei $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle$ mit $1/\tilde{c}_1^2$ skaliert ist. Diese Größe ist in den Abb. 5.13e,f als Funktion von J bzw. J_s aufgetragen. Bei direktem Vergleich mit der Parameterabhängigkeit der diskutierten 4-Qubit Maße, siehe Abb. 2.6, fällt ein direkter Zusammenhang auf. Zum Vergleich ist in den Abb. 5.13e,f zusätzlich die \sqrt{S} Invariante dargestellt. Sowohl die Minima bei $J, J_s = 2$ und der Unterschied der Werte in den Grenzfällen $J, J_s \rightarrow 0$ und $J, J_s \rightarrow \infty$ sind gut zu erkennen. Obwohl der vierdimensionale Mittelwert gleich Null ist, ist es nicht nur möglich eine 4-Qubit Verschränkung zu erkennen, sondern auch quantitativ zu messen.

5.4.2.4 Verallgemeinerter W-Zustand $|\phi_{14}\rangle$

Der Zustand $|\phi_{14}\rangle$ ist ebenfalls Eigenzustand einer Heisenberg Spinkette, welche schon mehrmals angesprochen wurde, vgl. Angang A. Der Zustand

$$|\phi_{14}\rangle = \varepsilon_1 |1110\rangle + \varepsilon_2 |1011\rangle + \varepsilon_3 |0111\rangle - \varepsilon_3 |1101\rangle \quad (5.276)$$

mit $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 = 1$ ist von verallgemeinerter W-Form, vgl (2.44). Die ε_i Parameter sind Funktionen bestimmter Wechselwirkungsparameter J und J_s der Heisenbergkette, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(J, J_s)$. Da mit den funktionalen Zusammenhängen nicht leicht zu rechnen ist, kann man beispielsweise die I-Concurrence bzw. die Spur der quadrierten reduzierten Dichtematrizen auch als Funktion der ε_i schreiben:

$$\text{tr}(\rho_1^2) = \text{tr}(\rho_3^2) = \varepsilon_3^4 + (1 - \varepsilon_3^2)^2 \quad (5.277)$$

$$\text{tr}(\rho_2^2) = \varepsilon_2^4 + (1 - \varepsilon_2^2)^2 \quad (5.278)$$

$$\text{tr}(\rho_4^2) = \varepsilon_1^4 + (1 - \varepsilon_1^2)^2 \quad (5.279)$$

Die eindimensionalen Mittelwerte ergeben sich zu:

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_3 \rangle = -\tilde{c}_1(1 - 2\varepsilon_3^2) \quad (5.280)$$

$$\langle x_2 \rangle = -\tilde{c}_1(1 - 2\varepsilon_2^2) \quad (5.281)$$

$$\langle x_4 \rangle = -\tilde{c}_1(1 - 2\varepsilon_1^2) \quad (5.282)$$

Mit obigen Gleichungen für die Spur der quadrierten reduzierten Dichtematrizen kann man leicht den Zusammenhang (5.209) mit den jeweiligen I-Concurrences nachprüfen. Die Restterme Rest_{x_i} sind gleich 0. Durch die Mittelwerte gelangt man zur I-Concurrence und somit zur Globalverschränkung Q , welche nach (2.45) proportional zur Summe der quadrierten Concurrences ist. Da der Zustand verallgemeinerte W-Form hat, ist zur vollständigen Charakterisierung somit nur noch die Verteilung der 2-Qubit Verschränkungen anzugeben.

Die Berechnung der höherdimensionalen Erwartungswerte liefert:

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \tilde{c}_1^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad (5.283)$$

$$\langle x_1 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2) - \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_3^2 \quad (5.284)$$

$$\langle x_1 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2(-\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \quad (5.285)$$

$$\langle x_2 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) - \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad (5.286)$$

$$\langle x_2 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2(-\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2) + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (5.287)$$

$$\langle x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^2(-\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \quad (5.288)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = \tilde{c}_1^3(-\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2) + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_3^2 \quad (5.289)$$

$$\langle x_1 x_2 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) \quad (5.290)$$

$$\langle x_1 x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2) + \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_3^2 \quad (5.291)$$

$$\langle x_2 x_3 x_4 \rangle = \tilde{c}_1^3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_3) \quad (5.292)$$

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = -\tilde{c}_1^4 + \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1^2 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_3^2) \quad (5.293)$$

Ähnlich zur Diskussion des Zustandes $|\phi_{15}\rangle$ spiegelt sich die Gleichheit mancher Concurrences nicht in der Gleichheit der Kovarianzen wieder. Der Unterschied ergibt sich durch das Vorzeichen des \tilde{d}_1^2 Anteiles der jeweiligen Kovarianzen. So sind die Concurrences C_{12} und C_{23} gleich, die Kovarianzen unterscheiden sich aber:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = -\tilde{c}_1^2 4\varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad (5.294)$$

$$\text{Cov}(x_2, x_3) = -\tilde{c}_1^2 4\varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 - \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad (5.295)$$

ebenso C_{14} und C_{34} mit:

$$\text{Cov}(x_1, x_4) = -\tilde{c}_1^2 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \quad (5.296)$$

$$\text{Cov}(x_3, x_4) = -\tilde{c}_1^2 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 - \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \quad (5.297)$$

Die beiden anderen Kovarianzen berechnen sich zu:

$$\text{Cov}(x_1, x_3) = -\tilde{c}_1^2 4\varepsilon_3^4 + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_3^2 \quad (5.298)$$

$$\text{Cov}(x_2, x_4) = -\tilde{c}_1^2 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \tilde{d}_1^2 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (5.299)$$

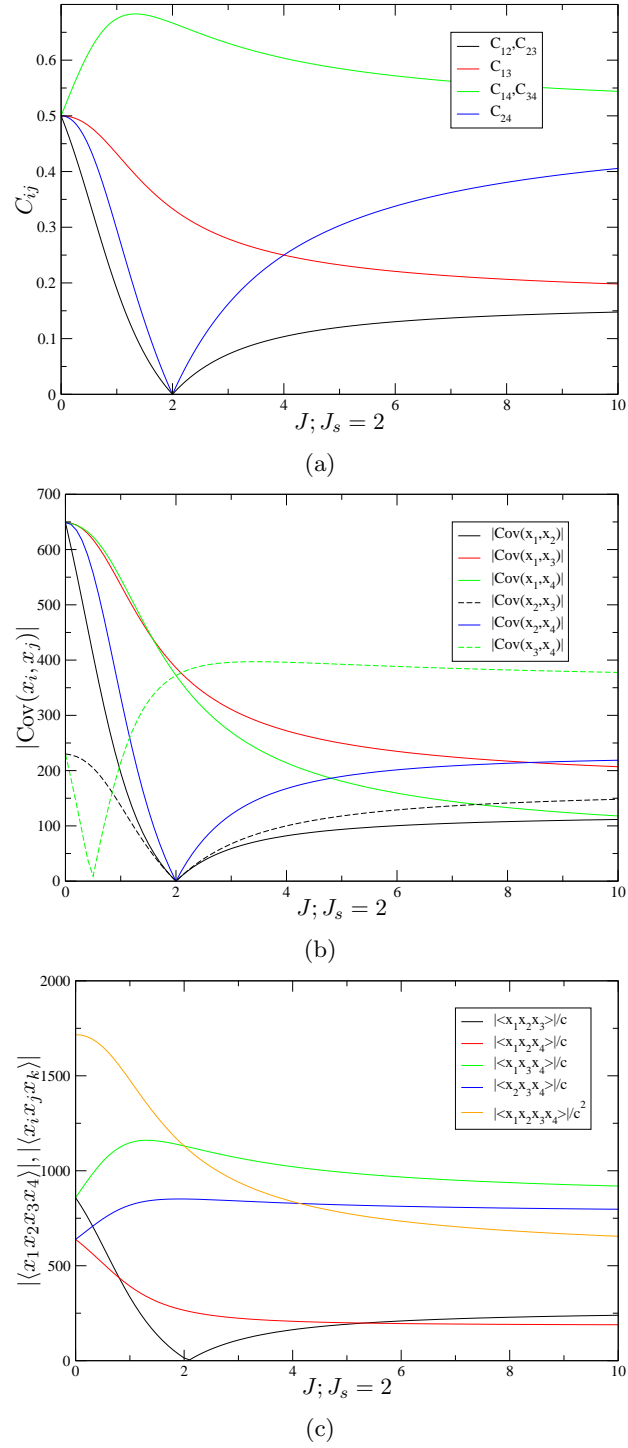


Abbildung 5.14: Concurrences (a), Kovarianzen (b) und höhere Erwartungswerte (c) des Zustandes $|\phi_{14}\rangle$ als Funktion des Parameters J mit $J_s = 2$. Die Erwartungswerte sind Darstellung der analytischen Lösungen für $t = 100$.

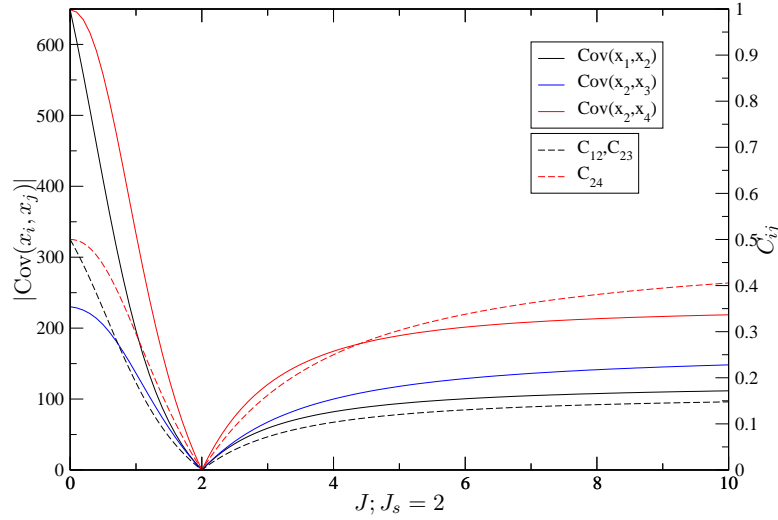


Abbildung 5.15: Vergleich ausgewählter Kovarianzen (linke y -Achse) und ausgewählter Concurrences (rechte y -Achse) für den Zustand $|\phi_{14}\rangle$ als Funktion des Parameters J mit konstantem $J_s = 2$.

Die Diskussion der Kovarianzen bezüglich der Verschränkungsstruktur erweist sich als schwierig. Einerseits sind im Zustand nur 2-Qubit Verschränkungen enthalten. Es ergibt sich aber keine direkte Umsetzung der Concurrences in den Kovarianzen. Der Unterschied der Verschränkungsinformation ist in den drei- und vierdimensionalen Erwartungswerten enthalten, welche ebenfalls parameterabhängig und ungleich Null sind.

In Abb. 5.14 sind die Concurrences, die Beträge der Kovarianzen und die drei- und vierdimensionalen Erwartungswerte als Funktion des Parameters J bei konstantem $J_s = 2$ dargestellt. Ein markanter Punkt ist bei $J = 2$. Hier sind die Concurrences C_{12}, C_{23} und C_{24} gleich 0. An diesem Punkt haben ebenso die passenden Kovarianzen $|\text{Cov}(x_1, x_2)|$, $|\text{Cov}(x_2, x_3)|$ und $|\text{Cov}(x_2, x_4)|$ eine Nullstelle. Ebenfalls sind Gemeinsamkeiten dieser Concurrence / Kovarianz Paare in den Grenzen $J \rightarrow 0$ und $J \rightarrow \infty$ zu erkennen. Der direkte Vergleich dieser Größen ist in Abb. 5.15 dargestellt. Überhaupt nicht ins Bild paßt der Vergleich der Concurrences C_{14}, C_{34} mit den Kovarianzen $|\text{Cov}(x_1, x_4)|$ und $|\text{Cov}(x_3, x_4)|$. Die Concurrences haben ein Maximum bei $J \approx 2$, die Kovarianz $|\text{Cov}(x_1, x_4)|$ fällt von $J = 0$ aus monoton ab und die Kovarianz $|\text{Cov}(x_3, x_4)|$ zeigt ein Minimum bei $J \approx 0.5$. Hingegen zeigt der dreidimensionale Erwartungswert $\langle x_1 x_3 x_4 \rangle$ ebenfalls ein Maximum bei $J \approx 2$. Erst die kombinierte Betrachtung der Kovarianzen und der höheren Erwartungswerte liefert also den Parameterverlauf der Concurrences.

5.4.3 Diskussion

Die Diskussion von 4-Qubit Zuständen erweist sich als kompliziert. Es fehlen einerseits die entsprechenden Maße, beispielsweise um die 3-Qubit bzw. 4-Qubit Verschränkung zu bestimmen, andererseits ist eine Fülle an Erwartungswerten vorhanden, die die Information über die Struktur der Verschränkung in sich bergen. Doch wie man gesehen hat, ist es möglich gewisse Information zu erhalten. Durch die eindimensionalen Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ erhält man die I-Concurrence und darüber die Globalverschränkung. Ebenso lassen sich durch eine kombinierte Betrachtung der Kovarianzen und der höheren Erwartungswerte, Strukturen der 2-Qubit Verschränkung bzw. 3- und 4-Qubit Verschränkung bestimmen.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Inhalt dieser vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von Verschränkungsstrukturen in multidimensionalen diskreten Quantum Walk Modellen. Der besondere Schwerpunkt liegt hierbei auf der Charakterisierung verschränkter Coin Startzustände mittels Ortskorrelationsfunktionen. Die Ausbreitung von QW Modellen wird in besonderem Maße durch zwei Faktoren bestimmt. Zum einen durch die Wahl des Würfeloperators, zum anderen durch die Wahl des Startzustandes im Coinraum. Wählt man einen Würfeloperator in Produktform, so sind die Korrelationen innerhalb der Verteilungen des QW alleine durch die Korrelationen des Coin Startzustandes bestimmt. Man hat also zwei Ansatzpunkte zur Verfügung. Ausgehend von der bekannten Verschränkungsstruktur des Coin Startzustandes kann man den Einfluß auf die Ortsverteilungen, charakterisiert durch Korrelationsfunktionen, analysieren. Andererseits kann man natürlich auch die andere Richtung einschlagen, um ausgehend von den Ortsverteilungen, Rückschlüsse auf die Verschränkung zu machen. Der erste Weg dient natürlich dazu die Zusammenhänge aufzuzeigen. Für 2- und 3-Qubit Zustände ist die Frage nach der Verschränkungsstruktur bereits gelöst. Gemessen werden kann die Verschränkung aus der Kombination Concurrences und Tangle. Problematischer wird es bei der Betrachtung von 4-Qubit Zuständen. Da die auftretenden Verschränkungsstrukturen noch nicht vollständig verstanden sind, ist die Untersuchung der Ortsverteilungen folglich mit Unkenntnis behaftet. Bis dato konnte eine 4-Qubit Verschränkung nur mit optimierten Bell Ungleichungen bzw. der CKW Ungleichung behandelt werden. In Kapitel 2 wurden diese Maße mit polynomiellen Invarianten verglichen. Im direkten Vergleich bei der Behandlungen von parameterabhängigen 4-Qubit Zuständen konnte gezeigt werden, daß eine der Invarianten dasselbe Parameterverhalten aufzeigt.

Die beiden unterschiedlichen Ansatzpunkte haben somit unterschiedliche Anwendungsgebiete. Ist einerseits die Verschränkungsstruktur und andererseits deren Abbildung in den Ortsraum des QW vollkommen verstanden, so lassen sich QW Experimente dahingehend nutzen, die Verschränkung eines unbekannten Coin Startzustandes zu bestimmen. Ist der Coin Startzustand zwar bekannt, dessen Verschränkung aber noch nicht bestimmbar, so können Ortskorrelationsfunktionen hilfreich sein, um die Struktur der Verschränkung besser zu verstehen.

Zur Klärung dieser Fragen wurden zwei Modelle untersucht. Das erste war ein im Ortsraum eindimensionales Modell mit mehreren Coins. Durch analytische und numerische Rechnungen konnte für bestimmte Zustände ein direkter Zusammenhang zwischen quadrierten Ortsmittelwerten und dem Verschränkungsmaß I-Concurrence nachgewiesen werden. Die Zustände, für die diese Beziehung gilt, hatten nur eine Art der Verschränkung und wurden

als Zustände mit reiner Verschränkung bezeichnet: bei 3-Qubit Zuständen beispielsweise entweder nur 2-Qubit verschränkt oder nur 3-Qubit verschränkt.

Modelle mit mehr Aussagekraft sind höherdimensionale QW Modelle. Pro Qubit im Coinraum gibt es eine vorhandene Ortsrichtung. Neben den eindimensionalen Ortserwartungswerten $\langle x_i \rangle$ können in diesen Modellen höhere Erwartungswerte studiert werden. Zudem ist es möglich, Korrelationen zwischen den einzelnen Raumrichtungen zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurde der QW analytisch betrachtet. Es war möglich, die Erwartungswerte exakt zu berechnen und als Funktion der Parameter eines allgemeinen Coin Startzustandes anzugeben. Hierbei wurde gezeigt, daß die zweiten Momente unabhängig von der Struktur des Coin Startzustandes sind. Die Darstellung der Mittelwerte kann immer auf folgende Form gebracht werden:

$$\text{Ortserwartungswert} = \sum \text{Faktor}_{\text{Zeitentwicklung QW}} \times \text{Faktor}_{\text{Coinstruktur Startzustand}}$$

Der Mittelwert wird also im allgemeinen durch zwei Faktoren bestimmt. Der eine Faktor folgt direkt aus der Zeitentwicklung des QW, der andere hängt von der Struktur des Coin Startzustandes ab. Letzterer enthält die Information über die Verschränkungsstruktur. Im Limes großer Zeiten sind die Faktoren aus der Zeitentwicklung des QW alle gleich und können als konstanter Faktor vor die Summe gezogen werden.

Die Struktur des Coinfaktors kann in direkten Zusammenhang mit den Elementen der zugehörigen Dichtematrix bzw. reduzierten Dichtematrix gebracht werden. Diese scheint von allgemeiner Gültigkeit zu sein, da sie unabhängig von der Anzahl der Raumdimensionen ist. Mit dieser Darstellung war es in Kapitel 5 möglich, einen allgemeinen Zusammenhang zwischen quadriertem eindimensionalen Mittelwert $\langle x_i \rangle^2$ und der quadrierten I-Concurrence IC_i^2 herzuleiten:

$$\langle x_i \rangle^2 = \tilde{c}_1^2 \left\{ (1 - IC_i^2) + \text{Rest}_{x_i} \right\} \quad (6.1)$$

Es besteht also eine direkte Beziehung zwischen eindimensionalen Mittelwerten und einem Verschränkungsmaß. Zusätzlich tritt ein Restterm Rest_{x_i} auf. Bei den betrachteten Beispielzuständen war dieser Restterm immer gleich Null. Die Darstellung von Spinkorrelationen weist im Vergleich eine große Ähnlichkeit auf. Daß ein Zusammenhang, zwischen Verschränkungsmaßen einerseits und Ortsmittelwerten andererseits existiert, folgt direkt aus der Beziehung zwischen Mittelwerten und der reduzierten Dichtematrix. Die I-Concurrence steht in direktem funktionalen Zusammenhang, als Spur über das Quadrat der reduzierten Dichtmatrix. Im Vergleich kann die Concurrence nicht direkt aus den auf zwei Qubits reduzierten Dichtematrizen berechnet werden. Die Berechnung der Concurrence führt über eine Maximierung der Eigenwerte der reduzierten Dichtematrix. Schon aufgrund der Komplexität dieser Berechnung kann kein direkter Zusammenhang zwischen Mittelwerten $\langle x_i x_j \rangle$ und Concurrences C_{ij} bestehen, obwohl natürlich die Information in den Dichtematrizen vorhanden ist.

Um Korrelationen zweier Zufallsvariablen zu betrachten, berechnet man die Kovarianz. Im zweidimensionalen Fall konnte für 2-Qubit Zustände mit reellen Koeffizienten gezeigt werden, daß eine endliche Concurrence eine notwendige Bedingung für eine endliche Kovarianz ist. Eine Verschränkung des Coin Startzustandes läßt sich also durch eine Korrelation der entsprechenden Raumrichtungen feststellen.

Die berechneten Mittelwerte bzw. Kovarianzen sind für Coin Startzustände mit einer unterschiedlichen Verschränkungsstruktur untersucht worden. Für 2-Qubit Zustände und

dementsprechend zweidimensionalen QW Modellen, genügt die Angabe der I-Concurrence zur vollständigen Charakterisierung der Verschränkungsstruktur. Die Berechnung der Mittelwerte $\langle x_i \rangle$ ist folglich ausreichend. Die Betrachtung der Kovarianz liefert ebenfalls Informationen über die Verschränkung, wobei hier eine auftretende Phasensensitivität betrachtet werden muß. Mit einer durchgeführten Mittelung über alle möglichen Phaseneinstellungen konnte gezeigt werden, daß für den untersuchten Beispielszustand die Kovarianz, bis auf eine Konstante, der quadrierten Concurrence entsprach.

Im 3-Qubit Fall kann neben möglichen 2-Qubit Verschränkungen eine zusätzliche 3-Qubit Verschränkung auftreten. Die Diskussion von 3-Qubit Zuständen lieferte mehrere Erkenntnisse. Es ist nicht nur möglich die Verschränkungsstruktur eines 3-Qubit Zustandes anhand der Ortserwartungswerte zu verstehen, sondern auch die unterschiedlichen Anteile quantitativ herauszuarbeiten. Die Struktur der Verschränkung ist schon anhand der Produktform der Ortserwartungswerte zu sehen. Dabei tritt einerseits der Effekt auf, daß sich die Concurrences nicht immer direkt mit den Kovarianzen abbilden lassen. Weiterhin gibt es, äquivalent zur Kovarianz, keine Definition einer Korrelation zwischen drei Zufallsvariablen. Um also die jeweiligen Verschränkungen zu bestimmen, ist ein funktionaler Zusammenhang aller Erwartungswerte notwendig. Subtrahiert man vom dreidimensionalen Mittelwert die Summe der Kovarianzen, so erhält man die Parameterabhängigkeit einer 3-Qubit Verschränkung, gleichwertig zum Tangle Maß.

Bei 4-Qubit Zuständen und folglich bei vierdimensionalen QW Modellen, konnte ebenfalls die Verschränkungsstruktur bei verschiedenen Zuständen aus den Ortskorrelationsfunktionen abgeleitet werden. Die Kombination aus vierdimensionalen Erwartungswerten und Summe der Kovarianzen brachte die gleiche Parameterabhängigkeit wie die optimierten Bell Ungleichungen, die CKW Ungleichung und die \sqrt{S} Invariante.

Es konnte also gezeigt werden, daß sich Verschränkungsstrukturen von Multiqubit Zuständen mit Ortskorrelationen multidimensionaler QW Modelle analysieren und sogar messen lassen. Hierbei ist die Wichtigkeit der zugrundeliegenden Quantum Walk Modelle nicht alleine aus theoretischer Sicht zu betonen, sondern auch aufgrund der experimentellen Umsetzungsmöglichkeiten. Der Zusammenhang von Korrelationsfunktionen und Verschränkungsmaßen bleibt ein Thema, welches bei einer weiteren Erforschung der Verschränkung nicht an Beachtung verlieren darf.

*Das, wobei unsere Berechnungen versagen,
nennen wir Zufall.
Albert Einstein*

Anhang A

Charakterisierung der 3- und 4-Qubit Beispielszustände

Die in dieser Arbeit diskutierten Beispielszustände wurden grōßteils im Rahmen der Diplomarbeit des Autors [43] besprochen und sind teilweise in [44] verōffentlicht. In diesem Anhang werden nur der Vollstāndigkeit halber die Zustānde inklusive Verschrānkungsmaōen kompakt dargestellt. Zu den aufgelisteten Maōen gehōren die Concurrence, die I-Concurrence sowie das Global Entanglement. Zusātzlich werden die Hamiltonoperatoren der 3- und 4-Qubit Heisenbergmodelle angegeben.

3-Qubit GHZ Zustand

$$\gamma|000\rangle + \sqrt{1-\gamma^2}|111\rangle \quad \gamma \in [0, 1] \quad (\text{A.1})$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{13} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$IC_{1-23} = IC_{2-13} = IC_{3-12} = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \quad (\text{A.3})$$

$$Q = \tau_{123} = 4\gamma^2(1-\gamma^2) \quad (\text{A.4})$$

4-Qubit GHZ-Zustand

$$\gamma|0000\rangle + \sqrt{1-\gamma^2}|1111\rangle \quad \gamma \in [0, 1] \quad (\text{A.5})$$

$$C_{ij} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$IC_i = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \quad (\text{A.7})$$

$$IC_{12-34} = IC_{13-24} = IC_{14-23} = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \quad (\text{A.8})$$

$$Q = 4\gamma^2(1-\gamma^2) \quad (\text{A.9})$$

3-Qubit Heisenbergkette

Hamiltonian mit Kopplungskonstante J und Anisotropieparameter Δ :

$$H = \frac{J}{4} \left(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \Delta \sigma_1^z \sigma_2^z + \sigma_2^x \sigma_3^x + \sigma_2^y \sigma_3^y + \Delta \sigma_2^z \sigma_3^z \right) + \frac{J}{2} \left(\sigma_1^x \sigma_3^x + \sigma_1^y \sigma_3^y + \Delta \sigma_1^z \sigma_3^z \right) \quad (\text{A.10})$$

Verallgemeinerte W-Zustände $|\psi_5\rangle, |\psi_6\rangle$

$$|\psi_5\rangle = \frac{\sqrt{\eta + (\Delta - 2)}}{2\sqrt{\eta}}(|011\rangle - \frac{4}{\eta + (\Delta - 2)}|101\rangle + |110\rangle) \quad (\text{A.11})$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{\sqrt{\eta + (\Delta - 2)}}{2\sqrt{\eta}}(|100\rangle - \frac{4}{\eta + (\Delta - 2)}|010\rangle + |001\rangle) \quad (\text{A.12})$$

$$C_{12} = C_{23} = \frac{2}{\eta} \quad C_{13} = \frac{4}{\eta^2 - (\Delta - 2)\eta} \quad (\text{A.13})$$

$$IC_1 = IC_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2} + \frac{\Delta - 2}{\eta}} \quad IC_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\eta} \quad (\text{A.14})$$

$$\tau_{123} = 0 \quad Q = \frac{4}{3}\left(\frac{6 - 3\Delta + 5\eta}{\eta^2(\Delta - 2 + \eta)}\right) \quad (\text{A.15})$$

Superpositionszustand $|\psi_{78}\rangle$

$$|\psi_7\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}\sqrt{\eta + (\Delta - 2)}}\left(|011\rangle + \frac{\eta + (\Delta - 2)}{2}|101\rangle + |110\rangle\right) \quad (\text{A.16})$$

$$|\psi_8\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta}\sqrt{\eta + (\Delta - 2)}}\left(|100\rangle + \frac{\eta + (\Delta - 2)}{2}|010\rangle + |001\rangle\right) \quad (\text{A.17})$$

$|\psi_{78}\rangle$ ist die gleichmäßige Überlagerung dieser beiden Zustände:

$$|\psi_{78}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_7\rangle + |\psi_8\rangle) \quad (\text{A.18})$$

Grenzfall:

$$\Delta \rightarrow \infty : |\psi_{78}\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |101\rangle) \quad (\text{A.19})$$

Verschrankungsmaße:

$$IC_{1-23} = IC_{3-12} = \sqrt{1 - \frac{4}{\eta^2}} \quad IC_{2-13} = \sqrt{1 - \frac{16}{(\eta^2 + (\Delta - 2)\eta)^2}}. \quad (\text{A.20})$$

$$Q = \frac{5\eta^2 - 12 + (\Delta - 2)\eta}{6\eta^2}. \quad (\text{A.21})$$

Der Verlauf der Concurrence in Abhängigkeit von Δ ist in Abb. A.1 dargestellt.

4-Qubit Heisenbergkette

Hamiltonian mit Kopplungskonstanten J und J_s :

$$H = \frac{J}{4}(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2\vec{\sigma}_3) + \frac{J_s}{4}(\vec{\sigma}_2\vec{\sigma}_4), \quad (\text{A.22})$$

mit

$$\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_j = \sigma_i^x\sigma_j^x + \sigma_i^y\sigma_j^y + \sigma_i^z\sigma_j^z. \quad (\text{A.23})$$

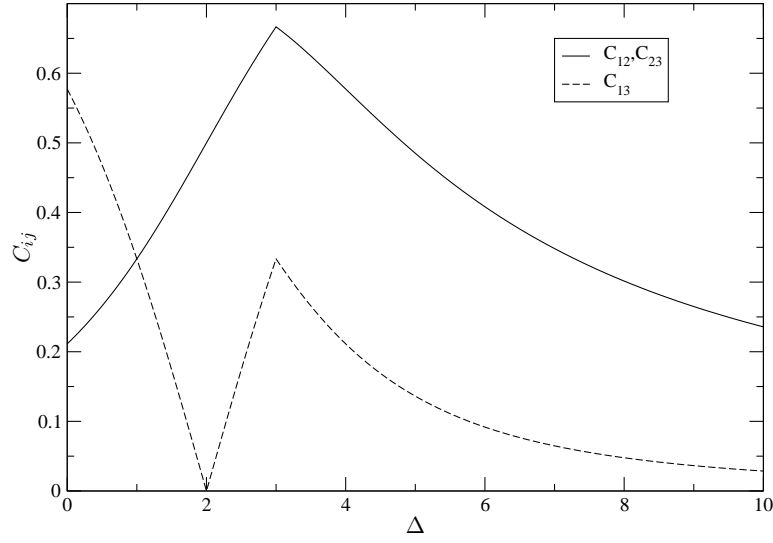


Abbildung A.1: Concurrence des Zustandes $|\psi_{78}\rangle$ als Funktion von Δ .

Verallgemeinerter W-Zustand $|\phi_{14}\rangle$

$$|\phi_{14}\rangle = \epsilon_1|1110\rangle + \epsilon_2|1011\rangle + \epsilon_3|0111\rangle - \epsilon_3|1101\rangle \quad (\text{A.24})$$

Abkürzungen:

$$\delta = \sqrt{9J^2 - 4JJ_s + 4J_s^2} \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{9J-2J_s}{\delta}}} \quad (\text{A.25})$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\mu_2} \quad \epsilon_2 = \frac{J_s - J}{\sqrt{2}\mu_2(3J + \delta)} \quad \epsilon_3 = \frac{\mu_2(3J + 2J_s + \delta)}{2\sqrt{18J^2 - 8JJ_s + 8J_s^2}} \quad (\text{A.26})$$

Verschrankungsmaße:

$$C_{12} = C_{23} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{8J(J - J_s)}{\delta^2} + \frac{-5J + 2J_s}{\delta}} \quad (\text{A.27})$$

$$C_{13} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{4J^2}{\delta^2} + \frac{-J + 2J_s}{\delta}} \quad (\text{A.28})$$

$$C_{14} = C_{34} = \frac{3J + 2J_s + \delta}{4\delta} \quad (\text{A.29})$$

$$C_{24} = \frac{(J - J_s)(3 + \frac{9J-2J_s}{\delta})}{6J + 2\delta}. \quad (\text{A.30})$$

$$IC_1 = IC_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{3 + \frac{4J^2}{\delta^2} - \frac{3(J - 2J_s)}{\delta}} \quad (\text{A.31})$$

$$IC_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{7 - \frac{4J(5J + 4J_s)}{\delta^2} + \frac{-7J - 2J_s}{\delta}} \quad (\text{A.32})$$

$$IC_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{7 + \frac{4J(-9J + 4J_s)}{\delta^2} + \frac{9J - 2J_s}{\delta}}. \quad (\text{A.33})$$

$$IC_{12} = IC_{14} = \sqrt{1 - \frac{4J^2}{\delta^2}} \quad IC_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4J^2}{\delta^2} + \frac{-J + 2J_s}{\delta}}. \quad (\text{A.34})$$

Heisenberg Zustand $|\phi_{15}\rangle$

$$|\phi_{15}\rangle = -\beta_1|0011\rangle + \beta_1|0110\rangle - \beta_1|1001\rangle + \beta_1|1100\rangle - \beta_2|0101\rangle + \beta_2|1010\rangle \quad (\text{A.35})$$

mit $4\beta_1^2 + 2\beta_2^2 = 1$

Abkürzungen:

$$\beta_1 = \frac{1}{c_{15}} \quad \beta_2 = \frac{Jc_{15}}{2\delta} \quad (\text{A.36})$$

mit

$$\delta = \sqrt{9J^2 - 4JJ_s + 4J_s^2} \quad c_{15} = \sqrt{4 + \frac{(-J + 2J_s + \delta)^2}{2J^2}} \quad (\text{A.37})$$

Grenzfall $J_s = 2, J \rightarrow 0$ und $J = 2, J_s \rightarrow \infty$:

$$|\Phi_{15}\rangle \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |1010\rangle) \quad (\text{A.38})$$

Concurrence:

$$C_{12} = C_{14} = C_{23} = C_{34} = \max\left(0, \frac{2J}{\delta} - \frac{4J^2}{8\delta^2 + (2J_s - J + \delta)^2}\right) \quad (\text{A.39})$$

C_{12}, C_{14}, C_{23} und C_{34} sind größer 0 und gleich für $J_s = 2, J > 0$ bzw. $J = 2, J_s > 0$. Die exakte Darstellung von C_{13} und C_{24} gelingt nur im Bereich $J = 2, J_s < 2$ und $J_s = 2, J > 2$:

$$C_{13} = C_{24} = \max\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}\delta}(\sqrt{\delta^2 + \delta(J - 2J_s) - 4J^2} - \sqrt{\delta^2 - \delta(J - 2J_s) - 4J^2})\right) \quad (\text{A.40})$$

Für $J = 2, J_s \geq 1$ und $J_s = 2, J \leq 4$ sind C_{13}, C_{24} gleich 0.

I-Concurrence:

$$IC_i = 1 \quad (\text{A.41})$$

$$IC_{12} = IC_{14} = \frac{1}{2}\sqrt{5 - \frac{12J^2}{\delta^2} + \frac{J - 2J_s}{\delta}} \quad (\text{A.42})$$

$$IC_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{12J^2}{\delta^2} + \frac{-J + 2J_s}{\delta}} \quad (\text{A.43})$$

Global Entanglement:

$$Q = 1 \quad (\text{A.44})$$

Anhang B

Exakte Ortserwartungswerte der 3D & 4D QW Modelle

Dieser Anhang enthält die exakte Darstellung der Mittelwerte der drei- und vierdimensionalen QW Modelle, in Abhängigkeit der Koeffizienten α_i der jeweiligen allgemeinen Coin Startzustände (5.104) und (5.200). Die konjugiert komplexen Anteile werden mit *c.c.* bezeichnet und beziehen sich jeweils auf den Anteil in der geschweiften Klammer. Die Methoden zur Berechnung der Erwartungswerte sind in Kapitel 5 ausführlich erläutert.

3D

$$\begin{aligned} \langle x_1 \rangle = \tilde{c}_1 \Big\{ & |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 \Big\} + \\ & \tilde{d}_1 \Big\{ \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1^* \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2^* \alpha_6 + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_3^* \alpha_7 + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_4^* \alpha_8 \Big\} \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_2 \rangle = \tilde{c}_1 \Big\{ & |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 \Big\} + \\ & \tilde{d}_1 \Big\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1^* \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2^* \alpha_4 + \alpha_5 \alpha_7^* + \alpha_5^* \alpha_7 + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_6^* \alpha_8 \Big\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_3 \rangle = \tilde{c}_1 \Big\{ & |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 \Big\} + \\ & \tilde{d}_1 \Big\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3^* \alpha_4 + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5^* \alpha_6 + \alpha_7 \alpha_8^* + \alpha_7^* \alpha_8 \Big\} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle = \tilde{c}_1^2 \Big\{ & |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 \Big\} + \\ & \tilde{d}_1^2 \Big\{ \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_1^* \alpha_7 + \alpha_2 \alpha_8^* + \alpha_2^* \alpha_8 + \alpha_3 \alpha_5^* + \alpha_3^* \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_6^* + \alpha_4^* \alpha_6 \Big\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \Big\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1^* \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1^* \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2^* \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2^* \alpha_6 - \\ & \alpha_3 \alpha_7^* - \alpha_3^* \alpha_7 - \alpha_5 \alpha_8^* - \alpha_5^* \alpha_8 - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_4^* \alpha_8 - \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_6^* \alpha_8 \Big\} \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 \right\} + \\
& \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_1^* \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_2^* \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_8^* + \alpha_3^* \alpha_8 + \alpha_4 \alpha_7^* + \alpha_4^* \alpha_7 \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1^* \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3^* \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_3^* \alpha_7 - \right. \\
& \left. \alpha_2 \alpha_6^* - \alpha_2^* \alpha_6 - \alpha_5 \alpha_6^* - \alpha_5^* \alpha_6 - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_4^* \alpha_8 - \alpha_7 \alpha_8^* - \alpha_7^* \alpha_8 \right\} \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 \right\} + \\
& \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_1^* \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_2^* \alpha_3 + \alpha_5 \alpha_8^* + \alpha_5^* \alpha_8 + \alpha_6 \alpha_7^* + \alpha_6^* \alpha_7 \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1^* \alpha_3 + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5^* \alpha_6 + \alpha_5 \alpha_7^* + \alpha_5^* \alpha_7 - \right. \\
& \left. \alpha_2 \alpha_4^* - \alpha_2^* \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_4^* - \alpha_3^* \alpha_4 - \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_6^* \alpha_8 - \alpha_7 \alpha_8^* - \alpha_7^* \alpha_8 \right\} \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^3 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 \right\} + \\
& \tilde{d}_1^3 \left\{ (\alpha_1 \alpha_8^* + \alpha_2 \alpha_7^* + \alpha_3 \alpha_6^* + \alpha_4 \alpha_5^*) + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 \left\{ (\alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_5^*) + c.c. \right. \\
& \left. - (\alpha_2 \alpha_8^* + \alpha_3 \alpha_8^* + \alpha_4 \alpha_6^* + \alpha_4 \alpha_7^* + \alpha_5 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_7^*) - c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1 \left\{ (\alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_7 \alpha_8^*) + c.c. - \right. \\
& \left. (\alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5 \alpha_7^*) - c.c. \right\} \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

4D

$$\begin{aligned}
\langle x_1 \rangle = & \tilde{c}_1 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 - \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_2 \alpha_{10}^* + \alpha_3 \alpha_{11}^* + \alpha_4 \alpha_{12}^* + \alpha_5 \alpha_{13}^* + \alpha_6 \alpha_{14}^* + \alpha_7 \alpha_{15}^* + \alpha_8 \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 \rangle = & \tilde{c}_1 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 + \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} + \\
& \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_9 \alpha_{13}^* + \alpha_{10} \alpha_{14}^* + \alpha_{11} \alpha_{15}^* + \alpha_{12} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3 \rangle = & \tilde{c}_1 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 + \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} + \\
& \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_5 \alpha_7^* + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_9 \alpha_{11}^* + \alpha_{10} \alpha_{12}^* + \alpha_{13} \alpha_{15}^* + \alpha_{14} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_4 \rangle = & \tilde{c}_1 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 + \right. \\ & \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} + \\ & \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_7 \alpha_8^* + \alpha_9 \alpha_{10}^* + \alpha_{11} \alpha_{12}^* + \alpha_{13} \alpha_{14}^* + \alpha_{15} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 - \right. \\ & \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\ & + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_{13}^* + \alpha_2 \alpha_{14}^* + \alpha_3 \alpha_{15}^* + \alpha_4 \alpha_{16}^* + \alpha_5 \alpha_9^* + \alpha_6 \alpha_{10}^* + \alpha_7 \alpha_{11}^* + \alpha_8 \alpha_{12}^* + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2 \alpha_{10}^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_3 \alpha_{11}^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_4 \alpha_{12}^* - \right. \\ & \left. \alpha_5 \alpha_{13}^* - \alpha_6 \alpha_{14}^* - \alpha_7 \alpha_{15}^* - \alpha_8 \alpha_{16}^* - \alpha_9 \alpha_{13}^* - \alpha_{10} \alpha_{14}^* - \alpha_{11} \alpha_{15}^* - \alpha_{12} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 - \right. \\ & \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\ & + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_{11}^* + \alpha_2 \alpha_{12}^* + \alpha_3 \alpha_9^* + \alpha_4 \alpha_{10}^* + \alpha_5 \alpha_{15}^* + \alpha_6 \alpha_{16}^* + \alpha_7 \alpha_{13}^* + \alpha_8 \alpha_{14}^* + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_{10}^* + \alpha_5 \alpha_7^* + \alpha_5 \alpha_{13}^* + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_{14}^* - \right. \\ & \left. \alpha_3 \alpha_{11}^* - \alpha_4 \alpha_{12}^* - \alpha_7 \alpha_{15}^* - \alpha_8 \alpha_{16}^* - \alpha_9 \alpha_{11}^* - \alpha_{10} \alpha_{12}^* - \alpha_{13} \alpha_{15}^* - \alpha_{14} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 - \right. \\ & \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\ & + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_{10}^* + \alpha_2 \alpha_9^* + \alpha_3 \alpha_{12}^* + \alpha_4 \alpha_{11}^* + \alpha_5 \alpha_{14}^* + \alpha_6 \alpha_{13}^* + \alpha_7 \alpha_{16}^* + \alpha_8 \alpha_{15}^* + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3 \alpha_{11}^* + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5 \alpha_{13}^* + \alpha_7 \alpha_8^* + \alpha_7 \alpha_{15}^* - \right. \\ & \left. \alpha_2 \alpha_{10}^* - \alpha_4 \alpha_{12}^* - \alpha_6 \alpha_{14}^* - \alpha_8 \alpha_{16}^* - \alpha_9 \alpha_{10}^* - \alpha_{11} \alpha_{12}^* - \alpha_{13} \alpha_{14}^* - \alpha_{15} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_2 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 + \right. \\ & \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\ & + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_2 \alpha_8^* + \alpha_3 \alpha_5^* + \alpha_4 \alpha_6^* + \alpha_9 \alpha_{15}^* + \alpha_{10} \alpha_{16}^* + \alpha_{11} \alpha_{13}^* + \alpha_{12} \alpha_{14}^* + c.c. \right\} + \\ & \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_9 \alpha_{11}^* + \alpha_9 \alpha_{13}^* + \alpha_{10} \alpha_{12}^* + \alpha_{10} \alpha_{14}^* - \right. \\ & \left. \alpha_3 \alpha_7^* - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_5 \alpha_7^* - \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_{11} \alpha_{15}^* - \alpha_{12} \alpha_{16}^* - \alpha_{13} \alpha_{15}^* - \alpha_{14} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 + \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_8^* + \alpha_4 \alpha_7^* + \alpha_9 \alpha_{14}^* + \alpha_{10} \alpha_{13}^* + \alpha_{11} \alpha_{16}^* + \alpha_{12} \alpha_{15}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_9 \alpha_{10}^* + \alpha_9 \alpha_{13}^* + \alpha_{11} \alpha_{12}^* + \alpha_{11} \alpha_{15}^* - \right. \\
& \left. \alpha_2 \alpha_6^* - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_5 \alpha_6^* - \alpha_7 \alpha_8^* - \alpha_{10} \alpha_{14}^* - \alpha_{12} \alpha_{16}^* - \alpha_{13} \alpha_{14}^* - \alpha_{15} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (B.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_3 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^2 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 + \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_5 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_7^* + \alpha_9 \alpha_{12}^* + \alpha_{10} \alpha_{11}^* + \alpha_{13} \alpha_{16}^* + \alpha_{14} \alpha_{15}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5 \alpha_7^* + \alpha_9 \alpha_{10}^* + \alpha_9 \alpha_{11}^* + \alpha_{13} \alpha_{14}^* + \alpha_{13} \alpha_{15}^* - \right. \\
& \left. \alpha_2 \alpha_4^* - \alpha_3 \alpha_4^* - \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_7 \alpha_8^* - \alpha_{10} \alpha_{12}^* - \alpha_{11} \alpha_{12}^* - \alpha_{14} \alpha_{16}^* - \alpha_{15} \alpha_{16}^* + c.c. \right\} \quad (B.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_2 x_3 \rangle = & \tilde{c}_1^3 \left\{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 - \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^3 \left\{ \alpha_1 \alpha_{15}^* + \alpha_2 \alpha_{16}^* + \alpha_3 \alpha_{13}^* + \alpha_4 \alpha_{14}^* + \alpha_5 \alpha_{11}^* + \alpha_6 \alpha_{12}^* + \alpha_7 \alpha_9^* + \alpha_8 \alpha_{10}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_1 \alpha_{11}^* + \alpha_1 \alpha_{13}^* + \alpha_2 \alpha_8^* + \alpha_2 \alpha_{12}^* + \alpha_2 \alpha_{14}^* + \alpha_3 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_9^* + \right. \\
& \left. \alpha_4 \alpha_6^* + \alpha_4 \alpha_{10}^* + \alpha_5 \alpha_9^* + \alpha_6 \alpha_{10}^* - \alpha_3 \alpha_{15}^* - \alpha_4 \alpha_{16}^* - \alpha_5 \alpha_{15}^* - \alpha_6 \alpha_{16}^* - \right. \\
& \left. \alpha_7 \alpha_{11}^* - \alpha_7 \alpha_{13}^* - \alpha_8 \alpha_{12}^* - \alpha_8 \alpha_{14}^* - \alpha_9 \alpha_{15}^* - \alpha_{10} \alpha_{16}^* - \alpha_{11} \alpha_{13}^* - \alpha_{12} \alpha_{14}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_2 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_6^* + \alpha_2 \alpha_{10}^* + \alpha_7 \alpha_{15}^* + \alpha_8 \alpha_{16}^* + \right. \\
& \left. \alpha_{11} \alpha_{15}^* + \alpha_{12} \alpha_{16}^* + \alpha_{13} \alpha_{15}^* + \alpha_{14} \alpha_{16}^* - \alpha_3 \alpha_7^* - \alpha_3 \alpha_{11}^* - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_4 \alpha_{12}^* - \right. \\
& \left. \alpha_5 \alpha_7^* - \alpha_5 \alpha_{13}^* - \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_6 \alpha_{14}^* - \alpha_9 \alpha_{11}^* - \alpha_9 \alpha_{13}^* - \alpha_{10} \alpha_{12}^* - \alpha_{10} \alpha_{14}^* + c.c. \right\} \quad (B.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_2 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^3 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 - |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 - \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^3 \left\{ \alpha_1 \alpha_{14}^* + \alpha_2 \alpha_{13}^* + \alpha_3 \alpha_{16}^* + \alpha_4 \alpha_{15}^* + \alpha_5 \alpha_{10}^* + \alpha_6 \alpha_9^* + \alpha_7 \alpha_{12}^* + \alpha_8 \alpha_{11}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_1 \alpha_{10}^* + \alpha_1 \alpha_{13}^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_2 \alpha_9^* + \alpha_3 \alpha_8^* + \alpha_3 \alpha_{12}^* + \alpha_3 \alpha_{15}^* + \right. \\
& \left. \alpha_4 \alpha_7^* + \alpha_4 \alpha_{11}^* + \alpha_5 \alpha_9^* + \alpha_7 \alpha_{11}^* - \alpha_2 \alpha_{14}^* - \alpha_4 \alpha_{16}^* - \alpha_5 \alpha_{14}^* - \alpha_6 \alpha_{10}^* - \right. \\
& \left. \alpha_6 \alpha_{13}^* - \alpha_7 \alpha_{16}^* - \alpha_8 \alpha_{12}^* - \alpha_8 \alpha_{15}^* - \alpha_9 \alpha_{14}^* - \alpha_{10} \alpha_{13}^* - \alpha_{11} \alpha_{16}^* - \alpha_{12} \alpha_{15}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_3 \alpha_4^* + \alpha_3 \alpha_7^* + \alpha_3 \alpha_{11}^* + \alpha_6 \alpha_{14}^* + \alpha_7 \alpha_{15}^* + \right. \\
& \left. \alpha_8 \alpha_{16}^* + \alpha_{10} \alpha_{14}^* + \alpha_{12} \alpha_{16}^* + \alpha_{15} \alpha_{16}^* - \alpha_2 \alpha_6^* - \alpha_2 \alpha_{10}^* - \alpha_4 \alpha_8^* - \alpha_4 \alpha_{12}^* - \right. \\
& \left. \alpha_5 \alpha_6^* - \alpha_5 \alpha_{13}^* - \alpha_7 \alpha_8^* - \alpha_7 \alpha_{15}^* - \alpha_9 \alpha_{10}^* - \alpha_9 \alpha_{13}^* - \alpha_{11} \alpha_{12}^* - \alpha_{11} \alpha_{15}^* + c.c. \right\} \quad (B.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_3 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^3 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 - |\alpha_6|^2 - |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 - \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^3 \left\{ \alpha_1 \alpha_{12}^* + \alpha_2 \alpha_{11}^* + \alpha_3 \alpha_{10}^* + \alpha_4 \alpha_9^* + \alpha_5 \alpha_{16}^* + \alpha_6 \alpha_{15}^* + \alpha_7 \alpha_{14}^* + \alpha_8 \alpha_{13}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_1 \alpha_{10}^* + \alpha_1 \alpha_{11}^* + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_9^* + \alpha_3 \alpha_9^* + \alpha_5 \alpha_8^* + \alpha_5 \alpha_{14}^* + \right. \\
& \alpha_5 \alpha_{15}^* + \alpha_6 \alpha_7^* + \alpha_6 \alpha_{13}^* + \alpha_7 \alpha_{13}^* - \alpha_2 \alpha_{12}^* - \alpha_3 \alpha_{12}^* - \alpha_4 \alpha_{10}^* - \alpha_4 \alpha_{11}^* - \\
& \alpha_6 \alpha_{16}^* - \alpha_7 \alpha_{16}^* - \alpha_8 \alpha_{14}^* - \alpha_8 \alpha_{15}^* - \alpha_9 \alpha_{12}^* - \alpha_{10} \alpha_{11}^* - \alpha_{13} \alpha_{16}^* - \alpha_{14} \alpha_{15}^* + c.c. \left. \right\} + \\
& \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_4 \alpha_{12}^* + \alpha_5 \alpha_6^* + \alpha_5 \alpha_7^* + \alpha_5 \alpha_{13}^* + \alpha_8 \alpha_{16}^* + \right. \\
& \alpha_{10} \alpha_{12}^* + \alpha_{11} \alpha_{12}^* + \alpha_{14} \alpha_{16}^* + \alpha_{15} \alpha_{16}^* - \alpha_2 \alpha_4^* - \alpha_2 \alpha_{10}^* - \alpha_3 \alpha_4^* - \alpha_3 \alpha_{11}^* - \\
& \alpha_6 \alpha_8^* - \alpha_6 \alpha_{14}^* - \alpha_7 \alpha_8^* - \alpha_7 \alpha_{15}^* - \alpha_9 \alpha_{10}^* - \alpha_9 \alpha_{11}^* - \alpha_{13} \alpha_{14}^* - \alpha_{13} \alpha_{15}^* + c.c. \left. \right\} \quad (B.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_2 x_3 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^3 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 + \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 - |\alpha_{10}|^2 - |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{14}|^2 + |\alpha_{15}|^2 - |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^3 \left\{ \alpha_1 \alpha_8^* + \alpha_2 \alpha_7^* + \alpha_3 \alpha_6^* + \alpha_4 \alpha_5^* + \alpha_9 \alpha_{16}^* + \alpha_{10} \alpha_{15}^* + \alpha_{11} \alpha_{14}^* + \alpha_{12} \alpha_{13}^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_5^* + \alpha_9 \alpha_{12}^* + \alpha_9 \alpha_{14}^* + \right. \\
& \alpha_9 \alpha_{15}^* + \alpha_{10} \alpha_{11}^* + \alpha_{10} \alpha_{13}^* + \alpha_{11} \alpha_{13}^* - \alpha_2 \alpha_8^* - \alpha_3 \alpha_8^* - \alpha_4 \alpha_6^* - \alpha_4 \alpha_7^* - \\
& \alpha_5 \alpha_8^* - \alpha_6 \alpha_7^* - \alpha_{10} \alpha_{16}^* - \alpha_{11} \alpha_{16}^* - \alpha_{12} \alpha_{14}^* - \alpha_{12} \alpha_{15}^* - \alpha_{13} \alpha_{16}^* - \alpha_{14} \alpha_{15}^* + c.c. \left. \right\} + \\
& \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_7 \alpha_8^* + \alpha_9 \alpha_{10}^* + \alpha_9 \alpha_{11}^* + \right. \\
& \alpha_9 \alpha_{13}^* + \alpha_{12} \alpha_{16}^* + \alpha_{14} \alpha_{16}^* + \alpha_{15} \alpha_{16}^* - \alpha_2 \alpha_4^* - \alpha_2 \alpha_6^* - \alpha_3 \alpha_4^* - \alpha_3 \alpha_7^* - \\
& \alpha_5 \alpha_6^* - \alpha_5 \alpha_7^* - \alpha_{10} \alpha_{12}^* - \alpha_{10} \alpha_{14}^* - \alpha_{11} \alpha_{12}^* - \alpha_{11} \alpha_{15}^* - \alpha_{13} \alpha_{14}^* - \alpha_{13} \alpha_{15}^* + c.c. \left. \right\} \quad (B.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = & \tilde{c}_1^4 \left\{ |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 - |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 - |\alpha_8|^2 - \right. \\
& \left. |\alpha_9|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2 - |\alpha_{14}|^2 - |\alpha_{15}|^2 + |\alpha_{16}|^2 \right\} \\
& + \tilde{d}_1^4 \left\{ \alpha_1 \alpha_{16}^* + \alpha_2 \alpha_{15}^* + \alpha_3 \alpha_{14}^* + \alpha_4 \alpha_{13}^* + \alpha_5 \alpha_{12}^* + \alpha_6 \alpha_{11}^* + \alpha_7 \alpha_{10}^* + \alpha_8 \alpha_9^* + c.c. \right\} + \\
& \tilde{c}_1 \tilde{d}_1^3 \left\{ \alpha_1 \alpha_8^* + \alpha_1 \alpha_{12}^* + \alpha_1 \alpha_{14}^* + \alpha_1 \alpha_{15}^* + \alpha_2 \alpha_7^* + \alpha_2 \alpha_{11}^* + \alpha_2 \alpha_{13}^* + \alpha_3 \alpha_6^* + \right. \\
& \alpha_3 \alpha_{10}^* + \alpha_3 \alpha_{13}^* + \alpha_4 \alpha_5^* + \alpha_4 \alpha_9^* + \alpha_5 \alpha_{10}^* + \alpha_5 \alpha_{11}^* + \alpha_6 \alpha_9^* + \alpha_7 \alpha_9^* - \\
& \alpha_2 \alpha_{16}^* - \alpha_3 \alpha_{16}^* - \alpha_4 \alpha_{14}^* - \alpha_4 \alpha_{15}^* - \alpha_5 \alpha_{16}^* - \alpha_6 \alpha_{12}^* - \alpha_6 \alpha_{15}^* - \alpha_7 \alpha_{12}^* - \alpha_7 \alpha_{14}^* - \\
& \alpha_8 \alpha_{10}^* - \alpha_8 \alpha_{11}^* - \alpha_8 \alpha_{13}^* - \alpha_9 \alpha_{16}^* - \alpha_{10} \alpha_{15}^* - \alpha_{11} \alpha_{14}^* - \alpha_{12} \alpha_{13}^* + c.c. \left. \right\} + \\
& \tilde{c}_1^3 \tilde{d}_1 \left\{ \alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1 \alpha_3^* + \alpha_1 \alpha_5^* + \alpha_1 \alpha_9^* + \alpha_4 \alpha_8^* + \alpha_4 \alpha_{12}^* + \alpha_6 \alpha_8^* + \alpha_6 \alpha_{14}^* + \right. \\
& \alpha_7 \alpha_8^* + \alpha_7 \alpha_{15}^* + \alpha_{10} \alpha_{12}^* + \alpha_{10} \alpha_{14}^* + \alpha_{11} \alpha_{12}^* + \alpha_{11} \alpha_{15}^* + \alpha_{13} \alpha_{14}^* + \alpha_{13} \alpha_{15}^* - \\
& \alpha_2 \alpha_4^* - \alpha_2 \alpha_6^* - \alpha_2 \alpha_{10}^* - \alpha_3 \alpha_4^* - \alpha_3 \alpha_7^* - \alpha_3 \alpha_{11}^* - \alpha_5 \alpha_6^* - \alpha_5 \alpha_7^* - \alpha_5 \alpha_{13}^* - \\
& \alpha_8 \alpha_{16}^* - \alpha_9 \alpha_{10}^* - \alpha_9 \alpha_{11}^* - \alpha_9 \alpha_{13}^* - \alpha_{12} \alpha_{16}^* - \alpha_{14} \alpha_{16}^* - \alpha_{15} \alpha_{16}^* + c.c. \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_1^2 \tilde{d}_1^2 \left\{ \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_1 \alpha_6^* + \alpha_1 \alpha_7^* + \alpha_1 \alpha_{10}^* + \alpha_1 \alpha_{11}^* + \alpha_1 \alpha_{13}^* + \alpha_2 \alpha_3^* + \alpha_2 \alpha_5^* + \right. \\
& \quad \alpha_2 \alpha_9^* + \alpha_3 \alpha_5^* + \alpha_3 \alpha_9^* + \alpha_4 \alpha_{16}^* + \alpha_5 \alpha_9^* + \alpha_6 \alpha_{16}^* + \alpha_7 \alpha_{16}^* + \alpha_8 \alpha_{12}^* + \\
& \quad \alpha_8 \alpha_{14}^* + \alpha_8 \alpha_{15}^* + \alpha_{10} \alpha_{16}^* + \alpha_{11} \alpha_{16}^* + \alpha_{12} \alpha_{14}^* + \alpha_{12} \alpha_{15}^* + \alpha_{13} \alpha_{16}^* + \alpha_{14} \alpha_{15}^* - \\
& \quad \alpha_2 \alpha_8^* - \alpha_2 \alpha_{12}^* - \alpha_2 \alpha_{14}^* - \alpha_3 \alpha_8^* - \alpha_3 \alpha_{12}^* - \alpha_3 \alpha_{15}^* - \alpha_4 \alpha_6^* - \alpha_4 \alpha_7^* - \\
& \quad \alpha_4 \alpha_{10}^* - \alpha_4 \alpha_{11}^* - \alpha_5 \alpha_8^* - \alpha_5 \alpha_{14}^* - \alpha_5 \alpha_{15}^* - \alpha_6 \alpha_7^* - \alpha_6 \alpha_{10}^* - \alpha_6 \alpha_{13}^* - \\
& \quad \left. \alpha_7 \alpha_{11}^* - \alpha_7 \alpha_{13}^* - \alpha_9 \alpha_{12}^* - \alpha_9 \alpha_{14}^* - \alpha_9 \alpha_{15}^* - \alpha_{10} \alpha_{11}^* - \alpha_{10} \alpha_{13}^* - \alpha_{11} \alpha_{13}^* + c.c. \right\} \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] ABAL, G.; DONANGELO, R.; ROMANELLI, R.; SIRI, R.: Effects of non-local initial conditions in the quantum walk on the line, *Physica A* **371**(1), 1–4 (2006)
- [2] ABAL, G.; SIRI, R.; ROMANELLI, A.; DONANGELO, R.: Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions, *Phys. Rev. A* **73**, 042302 (2006)
- [3] AGARWAL, G.; PATHAK, P.: Quantum random walk of the field in an externally driven cavity, *Phys. Rev. A* **72**, 033815 (2005)
- [4] AHARONOV, D.; AMBAINIS, A.; KEMPE, J.; VAZIRANI, U.: Quantum walks on graphs, in: *STOC '01: Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, S. 50–59, New York, NY, USA: ACM Press, 2001
- [5] AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N.: Quantum random walks, *Phys. Rev. A* **48**(2), 1687 (1993)
- [6] AMBAINIS, A.: Quantum walks and their algorithmic applications, *Int. J. Quantum Information* **1**(4), 507–518 (2003)
- [7] AMBAINIS, A.: Quantum walk algorithm for element distinctness, in: *FOCS '04: Proc. 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Bd. 00, S. 22–31, Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2004
- [8] AMBAINIS, A.; BACH, E.; NAYAK, A.; VISHWANATH, A.; J. WATROUS: One-dimensional quantum walks, in: *STOC '01: Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, S. 37–49, New York, NY, USA: ACM Press, 2001
- [9] BACH, E.; COPPERSMITH, S.; GOLDSCHEN, M.; JOYNT, R.; WATROUS, J.: One-dimensional quantum walks with absorbing boundaries, *J. Comput. Syst. Sci.* **69**(4), 562–592 (2004)
- [10] BAÑULS, M.; NAVARRETE, C.; PÉREZ, A.; ROLDÁN, E.; SORIANO, J.: Quantum walk with a time-dependent coin, *Phys. Rev. A* **73**, 062304 (2006)
- [11] BELINSKII, A.; KLYSHKO, D.: Interference of light and Bell's theorem, *Physics - Uspekhi* **36**, 653–693 (1993)
- [12] BENDER, C.; ORSZAG, M.: *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, MacGraw-Hill, 1978
- [13] BENNETT, C.; BERNSTEIN, H.; POPESCU, S.; SCHUMACHER, B.: Concentrating partial entanglement by local operations, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996)

- [14] BENNETT, C.; BRASSARD, G.: Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing, in: *Proceedings of IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing, Bangalore India*, S. 175–179, 1984
- [15] BENNETT, C.; BRASSARD, G.; CREPEAU, C.; JOSZA, R.; PERES, A.; WOOTTERS, W.: Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993)
- [16] BENNETT, C.; DiVINCENZO, D.; SMOLIN, J.; WOOTTERS, W.: Mixed-state entanglement and quantum error correction, *Phys. Rev. A* **54**(5), 3824 (1996)
- [17] BENNETT, C.; WIESNER, S.: Communication via One- and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992)
- [18] BERMAN, P. (Hg.): *Atom Interferometry*, Academic Press, 1997
- [19] BERRY, M.; MARZOLI, I.; SCHLEICH, W.: Quantum carpets, carpets of light, *Physics World* **June** (2001)
- [20] BOHR, N.: Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **48**, 696 (1935)
- [21] BOUWMEESTER, D.; EKERT, A.; ZEILINGER, A. (Hg.): *The Physics of Quantum Information*, Springer, 2000
- [22] BOUWMEESTER, D.; MARZOLI, I.; KARMANN, G.; SCHLEICH, W.; WOERDMAN, J.: Optical Galton board, *Phys. Rev. A* **61**, 013410 (1999)
- [23] BOUWMEESTER, D.; PAN, J.; MATTLE, K.; EIBL, M.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A.: Experimental quantum teleportation, *Nature* **390**, 575 (1997)
- [24] BRENNEN, G.: An observable measure of entanglement for pure states in multi-qubit systems, *Quant. Inf. Comp.* **3**(6), 619–626 (2003)
- [25] BRUN, T.; CARTERET, H.; AMBAINIS, A.: Quantum walks driven by many coins, *Phys. Rev. A* **67**, 052317 (2003)
- [26] BRUSS, D.: Characterizing entanglement, *J. Math. Phys.* **43**, 4237 (2002)
- [27] BUERSCHAPER, O.; BURNETT, K.: Stroboscopic quantum walks (2004), quant-ph/0406039
- [28] CARNEIRO, I.; LOO, M.; XU, X.; GIRERD, M.; KENDON, V.; KNIGHT, P.: Entanglement in coined quantum walks on regular graphs, *New. J. Phys.* **7**, 156 (2005)
- [29] CARTERET, H.; ISMAIL, M.; RICHMOND, B.: Three routes to the exact asymptotics for the one-dimensional quantum walk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 8775–8795 (2003)
- [30] CHANDRASHEKAR, C.: Implementing the one-dimensional (Hadamard) walk using a Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* **74**, 032307 (2006)
- [31] CHILDS, A.; CLEVE, R.; DEOTTO, E.; FARHI, E.; GUTMANN, S.; SPIELMAN, D.: Exponential algorithmic speedup by a quantum walk, in: *STOC '03: Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, S. 59–68, New York, NY, USA: ACM Press, 2003

- [32] CHILDS, A.; GOLDSTONE, J.: Spatial search and the Dirac equation, *Phys. Rev. A* **70**, 042312 (2004)
- [33] CHILDS, A.; GOLDSTONE, J.: Spatial search by quantum walk, *Phys. Rev. A* **70**, 022314 (2004)
- [34] COFFMAN, V.; KUNDU, J.; WOOTTERS, W.: Distributed entanglement, *Phys. Rev. A* **61**, 052306 (2000)
- [35] CÔTÉ, R.; RUSSELL, A.; EYLER, E. E.; GOULD, P.: Quantum random walk with Rydberg atoms in an optical lattice, *New Journal of Physics* **8**(8), 156 (2006)
- [36] DI, T.; HILLERY, M.; SUHAIL ZUBERY, M.: Cavity QED-based quantum walk, *Phys. Rev. A* **70**, 032304 (2004)
- [37] DÜR, W.; KENDON, V.; BRIEGEL, H.-J.: Quantum walks in optical lattices, *Phys. Rev. A* **66**, 052319 (2002)
- [38] DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J.: Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000)
- [39] ECKERT, K.; MOMPART, J.; BIRKL, G.; LEWENSTEIN, M.: One- and two-dimensional quantum walks in arrays of optical traps, *Phys. Rev. A* **72**, 012327 (2005)
- [40] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N.: Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935)
- [41] EKERT, A.: Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991)
- [42] EMARY, C.: A bipartite class of entanglement monotones for N-qubit pure states, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 8293–8302 (2004)
- [43] ENDREJAT, J.: *Vermessung und Klassifizierung der Verschränkung in 3- und 4-Qubit Heisenberg-Ketten*, Diplomarbeit, Universität Bayreuth (2003)
- [44] ENDREJAT, J.; BÜTTNER, H.: Characterization of entanglement of more than two qubits with Bell inequalities and global entanglement, *Phys. Rev. A* **71**, 012305 (2005)
- [45] ENDREJAT, J.; BÜTTNER, H.: Entanglement measurement with discrete multiple coin quantum walks, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 9289–9296 (2005)
- [46] FARHI, E.; GUTMANN, S.: Quantum computation and decision trees, *Phys. Rev. A* **58**(2), 915 (1997)
- [47] FLITNEY, A.; ABBOTT, D.; JOHNSON, N.: Quantum random walks with history dependence, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 7581–7591 (2004)
- [48] GATTNER, A.: *Asymptotisches Verhalten von Quanten-Zellularautomaten*, Diplomarbeit, TU Braunschweig (2005)
- [49] GELFAND, I.; KAPRANOV, M.; ZELEVINSKY, A.: *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, 1994

-
- [50] GLASER, U.; BÜTTNER, H.; FEHSKE, H.: Entanglement and correlation in anisotropic quantum spin systems, *Phys. Rev. A* **68**, 032318 (2003)
 - [51] GREENBERGER, D.; HORNE, M.; SHIMONY, A.; ZEILINGER, A.: Bell's Theorem without inequalities, *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990)
 - [52] GREENBERGER, D.; HORNE, M.; ZEILINGER, A.: Going Beyond Bell's Theorem, in: KAFATOS, M. (Hg.), *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, S. 69, Kluwer Academic Publishers, 1989
 - [53] GROVER, L.: Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325–328 (1997)
 - [54] GÜHNE, O.; HYLLUS, P.; GITTSOVICH, O.; EISERT, J.: Covariance matrices and the separability problem (2006), quant-ph/0611282
 - [55] HAAKE, F.: *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, 2000
 - [56] HAMADA, M.; KONNO, N.; SEGAWA, E.: Relation between coined quantum walks and quantum cellular automata, *RIMS Kokyuroku* **1422**, 1–11 (2005)
 - [57] HARMER, G.; ABBOTT, D.: Parrondo's Paradox, *Statistical Science* **14**, 206–213 (1999)
 - [58] HARMER, G.; ABBOTT, D.: A review of Parrondo's paradox, *Fluctuation and Noise Letters* **2**(2), R71–R107 (2002)
 - [59] HILL, S.; WOOTTERS, W.: Entanglement of a Pair of Quantum Bits, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997)
 - [60] HORODECKI, M.: Entanglement measures, *Quant. Inf. Comp.* **1**(1), 3–26 (2001)
 - [61] JEONG, H.; PATERNOSTRO, M.; KIM, M.: Simulation of quantum random walks using the interference of a classical field, *Phys. Rev. A* **69**, 012310 (2004)
 - [62] KALLOSH, R.; LINDE, A.: Strings, Black Holes and Quantum Information, *Phys. Rev. D* **73**, 104033 (2006)
 - [63] KEMPE, J.: Quantum random walks - an introductory overview, *Contemp. Physics* **44**, 307–327 (2003)
 - [64] KENDON, V.: Decoherence in quantum walks - a review (2006), quant-ph/0606016
 - [65] KENDON, V.: A random walk approach to quantum algorithms (2006), quant-ph/0609035
 - [66] KENDON, V.; SANDERS, B.: Complementarity and quantum walks, *Phys. Rev. A* **71**, 022307 (2005)
 - [67] KENDON, V.; TREGENNA, B.: Decoherence can be useful in quantum walks, *Phys. Rev. A* **67**, 042315 (2003)
 - [68] KLYSHKO, D.: The Bell and GHZ theorems: a possible three-photon interference experiment and the question of nonlocality, *Phys. Lett. A* **172**, 399–403 (1993)

- [69] KNIGHT, P.; ROLDÁN, E.; SIPE, J.: Quantum walk on the line as an interference phenomenon, *Phys. Rev. A* **68**, 020301(R) (2003)
- [70] KONNO, N.: A New Type of Limit Theorems for the One-Dimensional Quantum Random Walk (2000), to appear in *J. Math. Soc. Japan* (eprint: quant-ph/0206103)
- [71] KONNO, N.: Quantum Random Walks in One Dimension, *QIP* **1**, 345–354 (2002)
- [72] KONNO, N.; MISTUDA, K.; SOSHA, T.; YOO, H.: Quantum walks and reversible cellular automata, *Phys. Lett. A* **330**(6), 408–417 (2004)
- [73] KONNO, N.; NAMIKI, T.; SOSHI, T.: Symmetry of Distribution for the One-Dimensional Hadamard Walk, *Interdisciplinary Information Sciences* **10**(1), 11–22 (2004)
- [74] KOŠÍK, J.; BUŽEK, V.; HILLERY, M.: Quantum walks with random phase shifts (2006), quant-ph/0607092 (to appear in *Phys. Rev. A*)
- [75] LEIFER, M.; LINDEN, N.; WINTER, A.: Measuring polynomial invariants of multi-party quantum states, *Phys. Rev. A* **69**, 052304 (2004)
- [76] LÉVAY, P.: On the geometry of four qubit invariants, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 9533–9545 (2006)
- [77] LI, D.; LI, X.; HUANG, H.; LI, X.: The Simple Criteria of SLOCC Equivalence Classes (2006), quant-ph/0604160
- [78] LOHMAYER, R.; OSTERLOH, A.; SIEWERT, J.; UHLMANN, A.: Entangled three-qubit states without concurrence and three-tangle (2006), quant-ph/0606071
- [79] LUQUE, J.; THIBON, J.: The polynomial invariants of four qubits, *Phys. Rev. A* **67**, 042303 (2003)
- [80] MA, Z.-Y.; BURNETT, K.; D’ARCY, M. B.; GARDINER, S. A.: Quantum random walks using quantum accelerator modes, *Phys. Rev. A* **73**, 013401 (2006)
- [81] MACKAY, T.; BARTLETT, S.; STEPHENSON, L.; SANDERS, B.: Quantum walks in higher dimensions, *J. Phys. A* **35**, 2745 (2002)
- [82] MAGNIEZ, F.; SANTHA, M.; SZEGEDY, M.: Quantum algorithms for the triangle problem, in: *SODA ’05: Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, S. 1109–1117, Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005
- [83] MARCIKIC, I.; DE RIEDMATTEN, H.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H.; Gisin, N.: Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths, *Nature* **421**, 509 (2003)
- [84] MERMIN, N.: Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1838 (1990)
- [85] MEYER, D.; BLUMER, H.: Parrondo Games as Lattice Gas Automata, *J. Stat. Phys.* **107**, 225–239 (2002)
- [86] MEYER, D.; WALLACH, N.: Global entanglement in multiparticle systems, *J. Math. Phys.* **43**, 4273 (2002)

-
- [87] MIYAKE, A.: Classification of multipartite states by multidimensional determinants, *Phys. Rev. A* **67**, 012108 (2003)
 - [88] MOTWANI, R.; RAGHAVAN, P.: *Randomized Algorithms*, Cambridge University Press, 1995
 - [89] NAVARRETE, C.; PÉREZ, A.; ROLDÁN, E.: Non-Linear Quantum Walks (2006), quant-ph/0604084
 - [90] NAYAK, A.; VISHWANATH, A.: Quantum walk on the line, *DIMACS Technical Report* **43** (2000)
 - [91] NEGREVERGNE, C.; MAHESH, T.; RYAN, C.; DITTY, M.; CYR-RACINE, F.; POWER, W.; BOULANT, N.; HAVEL, T.; CORY, D.; LAFLAMME, R.: Benchmarking Quantum Control Methods on a 12-Qubit System, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 170501 (2006)
 - [92] NIELSEN, M.; CHUANG, I.: *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000
 - [93] OLVER, P.: *Classical Invariant Theory*, Cambridge University Press, 1999
 - [94] OSBORNE, T.; VERSTRAETE, F.: General Monogamy Inequality for Bipartite Qubit Entanglement, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 220503 (2006)
 - [95] PALUMBO, F.; NAPOLI, A.; MESSINA, A.: Interpreting concurrence in terms of covariances in a generalized spin star system (2006), quant-ph/0606163
 - [96] PLENIO, M.; VIRMANI, S.: An introduction to entanglement measures (2006), quant-ph/0504163v3
 - [97] RINNE, H.: *Taschenbuch der Statistik*, Harri Deutsch, 2003
 - [98] ROMANELLI, A.; SICARDI SCHIFINO, A.; SIRI, R.; ABAL, G.; AUYUANET, A.; DONANGELO, R.: Quantum random walk on the line as a Markovian process, *Physica A* **338**, 395–405 (2004)
 - [99] RUNGTA, P.; BUZEK, V.; C. M. CAVES; HILLERY, M.; G. J. MILBURN: Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions, *Phys. Rev. A* **64**, 042315 (2001)
 - [100] RYAN, C.; LAFOREST, M.; BOILEAU, J.; LAFLAMME, R.: Experimental Implementation of Discrete Time Quantum Random Walk on an NMR Quantum Information Processor, *Phys. Rev. A* **72**, 062317 (2005)
 - [101] SANDERS, B.; BARTLETT, S.; TREGENNA, B.; KNIGHT, P.: Quantum quincunx in cavity quantum electrodynamics, *Phys. Rev. A* **2003**, 042305 (2003)
 - [102] SCHRÖDINGER, E.: Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften* **23**(48), 807–812 (1935)
 - [103] SHENVI, N.; KEMPE, J.; WHALEY, K. B.: Quantum random-walk search algorithm, *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003)
 - [104] SHOR, P.: Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer, *SIAM J.Sci.Statist.Comput.* **26**, 1484 (1997)

- [105] STEANE, A.: *Decoherence and its implications in quantum computation and information transfer*, Kap. Quantum Computing and Error Correction, S. 284–298, IOS Press, Amsterdam, 2001, quant-ph/0304016
- [106] STRAUCH, F.: Connecting the discrete- and continuous-time quantum walks, *Phys. Rev. A* **74**, 030301 (2006)
- [107] SUMNER, J.; JARVIS, P.: Entanglement invariants and phylogenetic branching, *J. Math. Biol.* **51**, 18–36 (2005)
- [108] TERHAL, B.: Detecting quantum entanglement, *Theor. Comp. Sc.* **287**, 313–335 (2002)
- [109] TRAVAGLIONE, B.; MILBURN, G.: Implementing the quantum random walk, *Phys. Rev. A* **65**, 032310 (2002)
- [110] TREGENNA, B.; FLANAGAN, W.; MAILE, R.; KENDON, V.: Controlling discrete quantum walks: coins and initial states, *New. J. Phys.* **5**, 83 (2003)
- [111] URSIN, R.; JENNEWEIN, T.; ASPELMEYER, M.; KALTENBAEK, R.; LINDENTHAL, M.; WALTHER, P.; ZEILINGER, A.: Quantum teleportation across the Danube, *Nature* **430**, 849 (2004)
- [112] USHA DEVI, A.; PRABHU, R.; RAJAGOPAL, A.: Characterizing multiparticle entanglement in symmetric N-qubit states via negativity of covariance matrices, quant-ph/0609055
- [113] VANDERSYPEN, L.; STEFFEN, M.; BREYTA, G.; YANNONI, C.; SHERWOOD, M.; CHUANG, I.: Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance, *Nature* **414**, 883–887 (2001)
- [114] VEDRAL, V.: Entanglement in The Second Quantization Formalism, *Central Eur.J.Phys.* **1**(2), 289–306 (2003), quant-ph/0302040
- [115] VENEGAS-ANDRACA, S.; BALL, J.; BURNETT, K.; BOSE, S.: Quantum walks with entangled coins, *New Journal of Physics* **7**, 221 (2005)
- [116] VERSTRAETE, F.; DEHAENE, J.; DE MOOR, B.; VERSCHELDE, H.: Four Qubits can be entangled in nine different ways, *Phys. Rev. A* **65**, 052112 (2002)
- [117] VIDAL, G.: Entanglement monotones, *J. Mod. Opt* **47**, 355 (2000)
- [118] WÓJCIK, A.; ŁUCZAK, T.; KURZYŃSKI, P.; GRUDKA, A.; BEDNARSKA, M.: Quasi-periodic dynamics of a quantum walk on the line, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 180601 (2004)
- [119] WOOTTERS, W.: Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998)
- [120] WOOTTERS, W.: Entanglement of formation and concurrence, *Quant. Inf. Comp.* **1**(1), 27–44 (2001)
- [121] YU, S.; CHEN, Z.; PAN, J.; ZHANG, Y.: Classifying N-Qubit Entanglement via Bell’s Inequalities, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 080401 (2003)

- [122] ZUREK, W.: Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003)

Danksagung

Zum Schluß der Dank den Menschen, die mich auf diesem Weg begleitet und unterstützt haben. Die Zeit zwischen Dezember 2002 und Dezember 2006 am Lehrstuhl Theoretische Physik I in Bayreuth, wird mir immer in bester Erinnerung bleiben. Danken möchte ich:

- Meinem Doktorvater Prof. Dr. Helmut Büttner, für die Möglichkeit unter seiner Obhut zu arbeiten und zu forschen. Für die akademische Freiheit und den nötigen Korridor, der den Studien die richtige Richtung gab.
- Christian Brunhuber, für Alltägliches und die daraus gewachsene Freundschaft.
- Bernd Schlesier, ohne den eine Systemadministration nicht machbar gewesen wäre.
- Dr. Michael Kastner, als Fast-Zimmernachbarn und Ansprechpartner für Problemen aller Art.
- Tobias Kerscher und Christopher Gaul, als angenehmen Mitbewohnern bei Konferenzen und Sommerschulen.
- Dr. Olivier Sigwarth, für viele Snooker Frames.
- Christian Hörhammer, für die Nahtstelle *finance & physics*.
- Allen Teilnehmern des mittäglichen Mensaganges und der nachmittäglichen Teerunde, für die willkommene Abwechslung.
- Sigrid Glas, für die Hilfe bei Überwindung der Bürokratiehürden.
- Viv Kendon, für die Chance einige interessante Wochen in Leeds zu verbringen.
- Anneliese und Ludwig, Werner und Barbara, Bettina und Norbert, Renate, Heinz, Ralf und Liddi, für die Unterstützung, den Rückhalt, die Hilfe und, nicht zu vergessen, die Currywürste und die Erdbeermarmelade ;-).

Besonderer Dank gilt meiner Freundin Ina Burger, ohne deren Liebe mein Leben nicht mehr vorstellbar wäre.